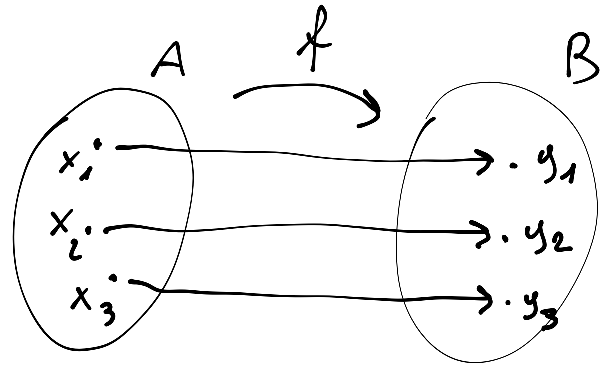
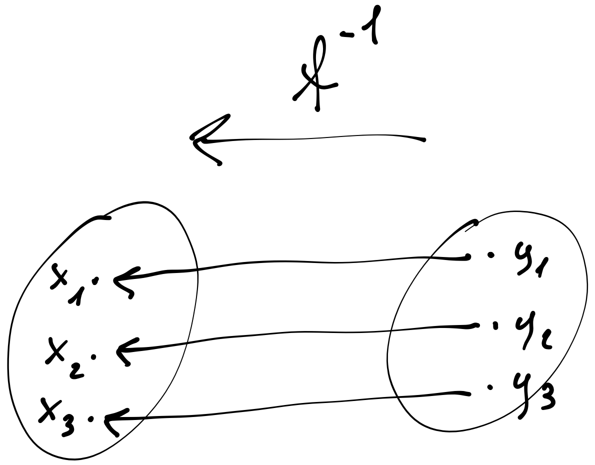
FUNZIONE INVERSA

IDEA



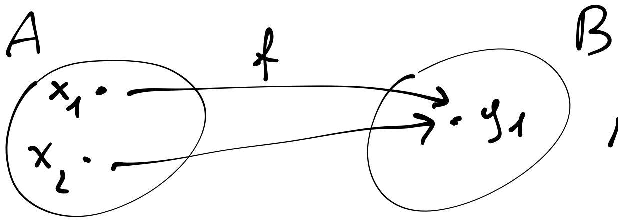
$f: A \to B$
BIETTIVA



$f^{-1}: B \to A$

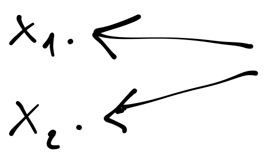
Si può fare solo se f è BIETTIVA, altrimenti quella che vorrebbe essere f^{-1} non è più una funzione!

ES.



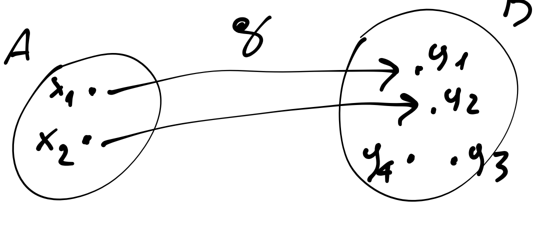
NON INIETTIVA

Se torno indietro ho



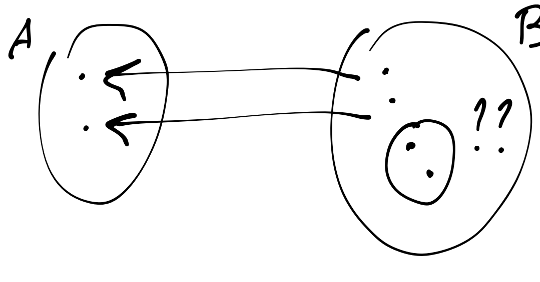
e non ho una funzione

Inoltre



NON SURIETTIVA

Se torno indietro



e non ho una funzione

DEFINIZIONE

$f: A \to B$ BIETTIVA

Si chiama FUNZIONE INVERSA DI f la funzione $f^{-1}: B \to A$

che associa ad ogni $y \in B$ l'unica controimmagine (tramite f) di y, che appartiene ad A.

In pratica

$$x \xmapsto{f} f(x) \qquad x \in A \qquad f(x) \in B$$

$$f(x) \xmapsto{f^{-1}} x$$

Si può anche scrivere

$$f(x) = y \overset{\Longleftrightarrow}{\text{sse}} x = f^{-1}(y)$$

$\boxed{\text{Una funzione è INVERTIBILE sse è BIETTIVA}}$

Tuttavia, se una funzione è solo INIETTIVA, è possibile considerarne l'inversa se prendiamo come dominio di quest'ultima il codominio della funzione data.

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $f(x) = x^2$ è BIETTIVA, dunque invertibile

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$3 \xmapsto{f} 3^2 = 9 \xmapsto{f^{-1}} \sqrt{9} = 3$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ NON INIETTIVA

$$3 \xmapsto{f} 9 \qquad 9 \longmapsto ?$$
$$-3 \xmapsto{f} 9$$

NON INVERTIBILE

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ INIETTIVA, NON SURIETTIVA (secondo la definizione non sarebbe invertibile)

FACCIAMO UN AGGIUSTAMENTO

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e siamo a posto! :)

CODOMINIO DI f

PAG. 114 N 232

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{4x-5}{3}$ Calcolare f^{-1}

$$\downarrow$$

$$y = \frac{4x-5}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$3y = 4x - 5$$

$$\Downarrow$$

SCAMBIO LA x E LA y

$$x = \frac{3y+5}{4} \rightsquigarrow y = \frac{3x+5}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{4}$$

$$f^{-1}(3) = \frac{9+5}{4} = \frac{7}{2}$$

233 Dimostra che la funzione $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ è biunivoca. Trova la funzione inversa $f^{-1}(x)$ e traccia i grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$. $[f^{-1}(x) = 2x - 2]$

234 Considera la funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$, dimostra che è invertibile e poi risolvi l'equazione $f^{-1}(x) = f(8)$. $[x = 2]$

233) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x}{2} + 1$

1) DIMOSTRO L'INIETTIVITÀ

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x_1}{2} + 1 = \frac{x_2}{2} + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{ok!}$$

2) DIMOSTRO LA SURIETTIVITÀ

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$$

Prendo un qualunque y, riesco a trovare la sua controimmagine?

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

DA RICAVARE

DATO

$$\frac{x}{2} = y - 1$$

$$x = 2y - 2 \quad \text{ok!}$$

3) ESPRESSIONE DELL'INVERSA

$$y = 2x - 2$$

234) $f(x) = \sqrt{x+1}$

DOMINIO $x+1 \geq 0 \to x \geq -1$

$[-1, +\infty)$

$f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

È INIETTIVA?

$\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$

$\Updownarrow$

$x_1 + 1 = x_2 + 1$

$\Downarrow$

$x_1 = x_2$

si può fare perché ho già messo a posto il dominio

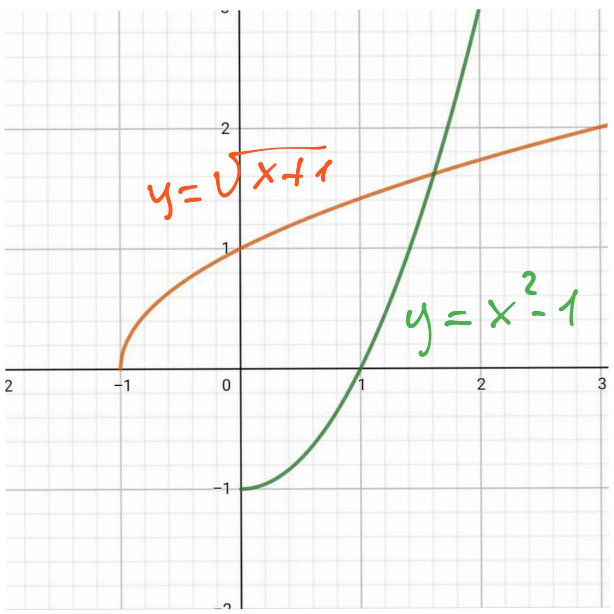
$$\boxed{\begin{gathered} a = b \\ \Downarrow \\ a^2 = b^2 \\ \Updownarrow \\ a = \pm b \end{gathered}}$$

CODOMINIO $= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = \mathbb{R}_0^+$

$y = \sqrt{x+1}$ DOMINIO $= [-1, +\infty)$

$y^2 = x + 1$

$x = y^2 - 1 \rightsquigarrow y = x^2 - 1$ INVERSA

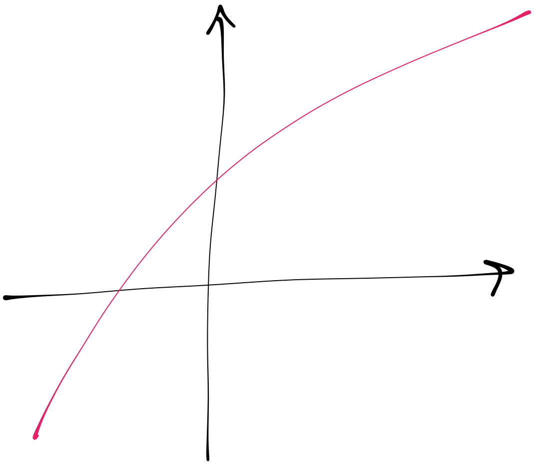


$f^{-1}(x) = x^2 - 1$

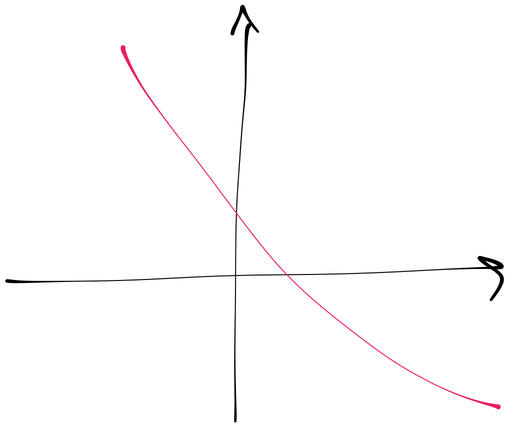
$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to [-1, +\infty)$

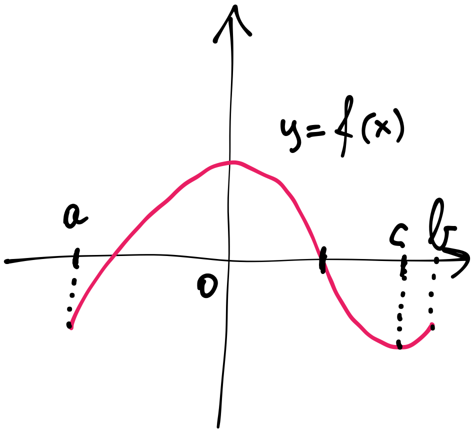
FUNZIONI MONOTÒNE

FUNZ. CRESCENTE (IN SENSO STRETTO)



FUNZ. DECRESCENTE (IN SENSO STRETTO)



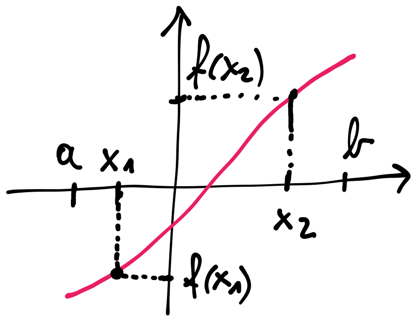


$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f è CRESCENTE IN $[a, 0]$ E IN $[c, b]$

f è DECRESCENTE IN $[0, c]$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



Si dice che f è CRESCENTE (IN SENSO STRETTO) in $[a, b]$ se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

Si dice che f è DECRESCENTE (IN SENSO STRETTO) in $[a, b]$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$