656 Studia il fascio di rette di equazione $(k+2)x+(2-k)y+3-k=0$ e determina per quali valori del parametro k la retta del fascio:

a. passa per l'origine;
b. è parallela alla retta $y=3$;
c. è perpendicolare alla retta $2x+3y-4=0$;
d. incontra la retta di equazione $x+4y-1=0$ nel punto di ordinata 1;
e. è parallela alla retta passante per $(-1;1)$ e $(2;-1)$.

$\left[\text{a) } 3; \text{ b) } -2; \text{ c) } 10; \text{ d) } -\frac{1}{5}; \text{ e) } -\frac{2}{5}\right]$

a) $3-k=0 \Rightarrow \boxed{k=3}$

STUDIO DEL FASCIO

$kx+2x+2y-ky+3-k=0$

$2x+2y+3+k(x-y-1)=0$

$\begin{cases} 2x+2y+3=0 & 1° \text{ GEN.} \\ x-y-1=0 & 2° \text{ GEN.} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+2x-2+3=0 \\ y=x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x=-1 \\ y=x-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=-\frac{5}{4} \end{cases}$

FASCIO PROPRIO DI CENTRO $C\left(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right)$

b) // retta $y=3 \Rightarrow k+2=0 \Rightarrow k=-2$

c) $\perp$ retta $2x+3y-4=0$

$(k+2)x+(2-k)y+3-k=0$

$2(k+2)+3(2-k)=0$

$2k+4+6-3k=0$ $\quad -k=-10 \Rightarrow \boxed{k=10}$

d) $x+4y-1=0$ $\quad (-3, 1)$

ORDINATA

$x+4\cdot1-1=0 \Rightarrow x=-3$

SOSTITUISCO NEL FASCIO

$(k+2)(-3)+(2-k)\cdot 1+3-k=0$

$-3k-6+2-k+3-k=0$

$-5k=1$ $\quad \boxed{k=-\frac{1}{5}}$

e) // retta per $(-1,1)$ e $(2,-1)$

$m=\frac{1+1}{-1-2}=-\frac{2}{3}$

$-\frac{k+2}{2-k}=-\frac{2}{3}$

$3k+6=4-2k$

$5k=-2$ $\quad \boxed{k=-\frac{2}{5}}$

658 Siano dati i due fasci di rette r: $hx - y + 3h = 0$ e s: $x - 2hy + h = 0$.

a. Determina la retta comune ai due fasci.

b. Scrivi, al variare di h, le coordinate del punto di intersezione P tra le rette r e s.

c. Trova il valore di h per cui il punto P coincide con l'origine degli assi.

d. Detti A e B i rispettivi centri dei fasci, trova l'area del triangolo ABO.

$\left[\text{a) } x - 6y + 3 = 0;\ \text{b) } P\left(\frac{-6h^2 + h}{2h^2 - 1};\ \frac{h^2 - 3h}{2h^2 - 1}\right);\ \text{c) } 0;\ \text{d) } \frac{3}{4}\right]$

$r:\ hx - y + 3h = 0$

$s:\ x - 2hy + h = 0$

Una retta che appartiene a entrambi i fasci deve passare sia per il centro di r che per il centro di s

$r:\ -y + h(x+3) = 0$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$ $C_r(-3, 0)$

$s:\ x + h(-2y+1) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ $C_s\left(0, \frac{1}{2}\right)$

retta per i due centri $\dfrac{y-0}{\frac{1}{2}-0} = \dfrac{x+3}{0+3}$ $\quad 2y = \dfrac{x+3}{3}$

$6y = x + 3$

$\boxed{x - 6y + 3 = 0}$

OTTENUTA DA r CON $h = \frac{1}{6}$

OTTENUTA DA s CON $h = 3$

b) $\begin{cases} hx - y + 3h = 0 \\ x - 2hy + h = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} h(2hy - h) - y + 3h = 0 \\ x = 2hy - h \end{cases}$

$\begin{cases} 2h^2y - h^2 - y + 3h = 0 \\ x = 2hy - h \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y(2h^2 - 1) = h^2 - 3h \\ x = 2hy - h \end{cases}$

$\boxed{P\left(\frac{-6h^2+h}{2h^2-1}, \frac{h^2-3h}{2h^2-1}\right)}$

$\begin{cases} y = \dfrac{h^2 - 3h}{2h^2 - 1} \\ x = 2h \cdot \dfrac{h^2 - 3h}{2h^2 - 1} - h = \dfrac{\cancel{2h^3} - 6h^2 - \cancel{2h^3} + h}{2h^2 - 1} = \dfrac{-6h^2 + h}{2h^2 - 1} \end{cases}$

c)

$$\boxed{P\left(\frac{-6h^2+h}{2h^2-1}, \frac{h^2-3h}{2h^2-1}\right)}$$

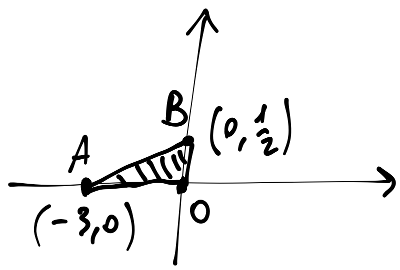
$h=0 \vee h=\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} \dfrac{-6h^2+h}{\cancel{2h^2-1}}=0 \\ \dfrac{h^2-3h}{\cancel{2h^2-1}}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -6h^2+h=0 \\ h^2-3h=0 \end{cases} \quad \begin{cases} h(-6h+1)=0 \\ h(h-3)=0 \end{cases}$$

$h=0 \vee h=3$

$$\Rightarrow \boxed{h=0}$$

d)



$$Area_{AOB} = \frac{1}{2}\left(|-3|\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

580 Sono dati i punti $A(2; 3)$ e $B(4; 0)$. Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti P tali che $\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = 2$ e calcola il perimetro e l'area del trapezio che il luogo forma con gli assi cartesiani.

$\left[4x-6y-5=0 \vee 4x-6y-1=0; \frac{3\sqrt{13}+10}{6}; \frac{1}{2}\right]$

$P(x,y)$

$$\overline{PA}^2 = (x-2)^2+(y-3)^2$$
$$\overline{PB}^2 = (x-4)^2+(y-0)^2$$

$$\left|\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2\right| = 2$$

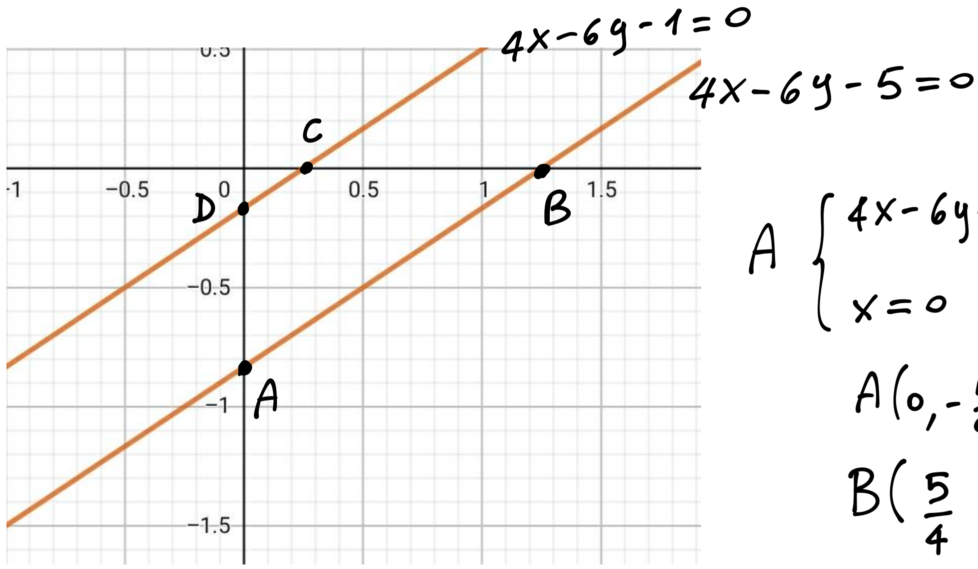
$$\hookrightarrow \left|(x-2)^2+(y-3)^2-(x-4)^2-y^2\right| = 2$$

$$\left|\cancel{x^2}+4-4x+\cancel{y^2}+9-6y-\cancel{x^2}-16+8x-\cancel{y^2}\right| = 2$$

$$|4x-6y-3| = 2 \rightarrow 4x-6y-3=\pm 2$$

$$\boxed{4x-6y-1=0 \quad \vee \quad 4x-6y-5=0}$$

COPPIA DI RETTE PARALLELE



$$A \begin{cases} 4x-6y-5=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{5}{6} \end{cases}$$

$A\left(0,-\frac{5}{6}\right)$ $\quad C\left(\frac{1}{4},0\right)$

$B\left(\frac{5}{4},0\right)$ $\quad D\left(0,-\frac{1}{6}\right)$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABO} - \mathcal{A}_{DCO} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{25}{48} - \frac{1}{48} = \frac{24}{48} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{AD} = \left|-\frac{5}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)\right| = \left|-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right| = \frac{2}{3}$$

$$\overline{CB} = \left|\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right| = 1$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}-0\right)^2+\left(0+\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{9+4}{144}} = \frac{\sqrt{13}}{12}$$

$$\overline{AB} = 5\,\overline{CD} = \frac{5\sqrt{13}}{12}$$

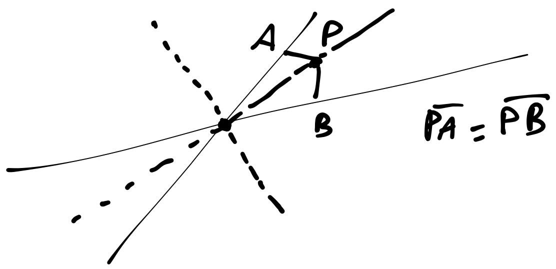
$$2p_{ABCD} = \frac{2}{3}+1+\frac{5\sqrt{13}}{12}+\frac{\sqrt{13}}{12} = \boxed{\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{5}{3}}$$

527 $x + 6y + 2 = 0, \qquad 6x + y - 1 = 0.$ $[5x - 5y - 3 = 0; 7x + 7y + 1 = 0]$

BISETTRICA DEGLI ANGOLI FRA LE RETTE

↓

luogo dei punti equidistanti da entrambe le rette



SCRIVO IL GENERICO PUNTO DEL LUOGO $P(x,y)$

$$\underbrace{\frac{|x+6y+2|}{\cancel{\sqrt{1^2+6^2}}}}_{\text{DISTANZA DI } P \text{ DALLA } 1^\circ \text{ RETTA}} = \underbrace{\frac{|6x+y-1|}{\cancel{\sqrt{6^2+1^2}}}}_{\text{DISTANZA DI } P \text{ DALLA } 2^\circ \text{ RETTA}}$$

$$x+6y+2 = \pm(6x+y-1)$$

$$x+6y+2 = 6x+y-1 \quad \vee \quad x+6y+2 = -6x-y+1$$

$$\underbrace{5x-5y-3=0}_{1^\circ \text{ BISETTRICE}} \quad \vee \quad \underbrace{7x+7y+1=0}_{2^\circ \text{ BISETTRICE}}$$

↓

SONO PERPENDICOLARI

BARICENTRO DI UN TRIANGOLO DI VERTICI

$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B) \quad C(x_C, y_C)$

$G(x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$