28/11/2017

RIPASSO POTENZE

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ fattori}}$$

$$5^{3}$$

$3 \rightarrow$ ESPONENTE

$5 \rightarrow$ BASE DELLA POTENZA

Cerchiamo di dare significato a scritture del tipo

$$5^{-7} \qquad 3^{\frac{2}{5}} \qquad 2^{-\frac{5}{4}} \qquad 4^{\pi} \qquad 3^{\sqrt{2}} \qquad 5^{\sqrt{2}+1}$$

DA ADESSO IN POI <u>TUTTE</u> LE BASI CHE CONSIDEREREMO SARANNO > 0

$$a^n \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad a > 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

POTENZE A ESPONENTE NATURALE

$n \in \mathbb{N}$

$a > 0$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ FATTORI}}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$a^1 = a \qquad \underbrace{a^0 = 1}_{\text{CONVENZIONE}} \quad (\text{perché?})$$

ANTICIPAZIONE

$$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3+2 \text{ FATTORI}}$$

VOGLIO CHE QUESTA PROPRIETÀ VALGA SEMPRE!

$$a^3 \cdot a^0 = a^{3+0} = a^3$$

$a^0 = 1$ è l'unico modo per far funzionare le proprietà anche in questo caso

DEFINIZIONE FORMALE

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$5^3 = 5 \cdot 5^{3-1} = 5 \cdot 5^2 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5^{2-1} = 5 \cdot 5 \cdot 5^1 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^{1-1} =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5^0 =$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 125$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE - PARTE 1

IMPORTANTISSIME!!!

BASI SEMPRE > 0

ESEMPI

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad 3^7 : 3^5 = 3^2$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (2^3)^2 = 2^6$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$(2^3)^2 \downarrow 2^3 \cdot 2^3$$

$$\underbrace{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fattori}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ fattori}}}_{3 \cdot 2 \text{ fattori}}$$

CERCHIAMO UN SENSO PER a^{-n} $\quad n \in \mathbb{N}$

Ad es. 3^{-2} cosa dovrebbe essere, se voglio che valgano le proprietà delle potenze?

$$3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$$

quindi $\quad 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$

DEFINIZIONE

$a > 0 \quad n \in \mathbb{N} \qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE - PARTE 2

$\underbrace{a, b > 0}_{\text{BASI}}$ n ESPONENTE

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$a^n : b^n = (a:b)^n$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

POTENZE A ESPONENTE RAZIONALE

$$\boxed{\begin{array}{l} n, m \in \mathbb{Z} \\ a > 0 \\ a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \end{array}}$$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$$5^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^2}$$

MOTIVAZIONI DI QUESTA DEFINIZIONE

$$\left(5^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{2}{\cancel{7}} \cdot \cancel{7}} = 5^2$$

qual è il numero che elevato alla 7-ma dà come risultato 5^2?

Proprio $\sqrt[7]{5^2}$

ESEMPIO

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2}$$

$$\downarrow$$

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{6}} = \left(3^3 \cdot 2^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

ADESSO SI TRATTA DI DARE SENSO ALLE POTENZE A ESPONENTE IRRAZIONALE

$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$$

$$\simeq 1,4 = \frac{14}{10}$$

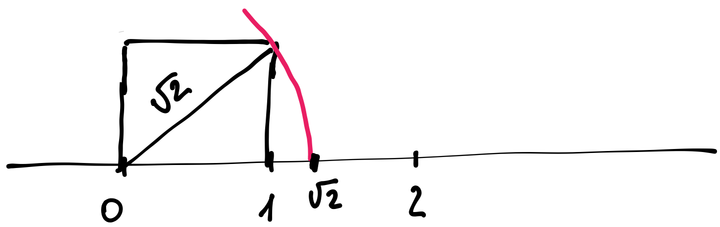
$$\simeq 1,41 = \frac{141}{100}$$

$$\simeq 1,414 = \frac{1414}{1000}$$

$$\simeq 1,4142 = \frac{14142}{10000}$$

....

OGNI NUMERO IRRAZIONALE SI PUÒ APPROSSIMARE SEMPRE MEGLIO MEDIANTE NUMERI RAZIONALE



Se devo dare un significato

$5^{\sqrt{2}}$ IDEALMENTE $5^{1}, 5^{1,4}, 5^{1,41}, 5^{1,414}, \ldots$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, PROCEDENDO IN QUESTO MODO, QUESTA SUCCESSIONE SI AVVICINA SEMPRE PIÙ A UN NUMERO REALE <u>BEN IDENTIFICATO</u>

$\downarrow$

QUESTO NUMERO LO DEFINISCO COME $\boxed{5^{\sqrt{2}}}$

Con questa definizione di potenza a esponente irrazionale <u>TUTTE</u> le proprietà delle potenze continuano a valere.

ES. $5^{\sqrt{2}} \cdot 5^{\pi} = 5^{\sqrt{2}+\pi}$