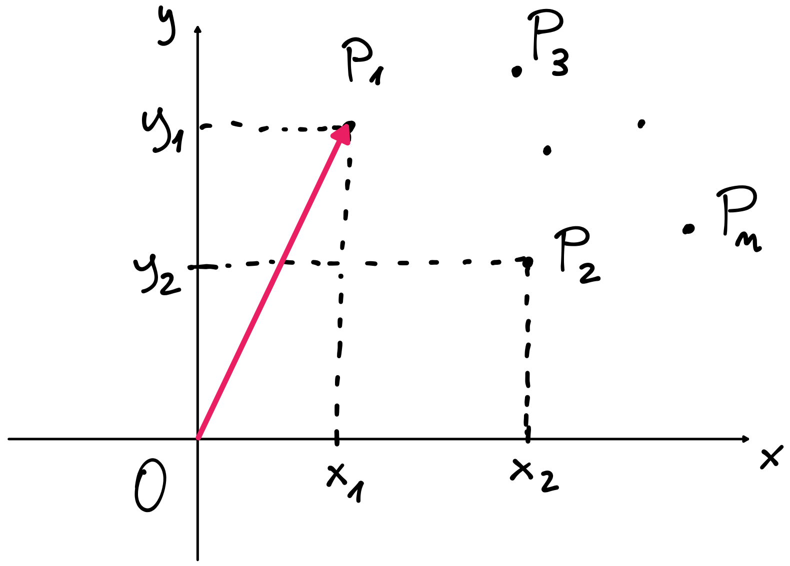
31/10/2018

CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI (NEL PIANO)



AD OGNI PUNTO P_i $i=1,\dots,n$ È ASSOCIATA LA SUA MASSA m_i

(P_1, m_1)

(P_2, m_2)

$\vdots$

(P_n, m_n)

VETTORE POSIZIONE DI P_1 È $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$

C_M = CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA

IL VETTORE POSIZIONE DI C_M È $\overrightarrow{OC_M} = (x_{C_M}, y_{C_M})$ E SI CALCOLA COSÌ

$$\begin{cases} x_{C_M} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\[2ex] y_{C_M} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

PIÙ SEMPLICEMENTE

	VETTORI POSIZIONE
(P_1, m_1)	$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$
(P_2, m_2)	$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$
$\vdots$	$\vdots$

$$\boxed{\vec{r}_{C_M} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}$$

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$ $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ .... $\vec{r}_n = (x_n, y_n)$ $\vec{r}_{C_M} = (x_{C_M}, y_{C_M})$

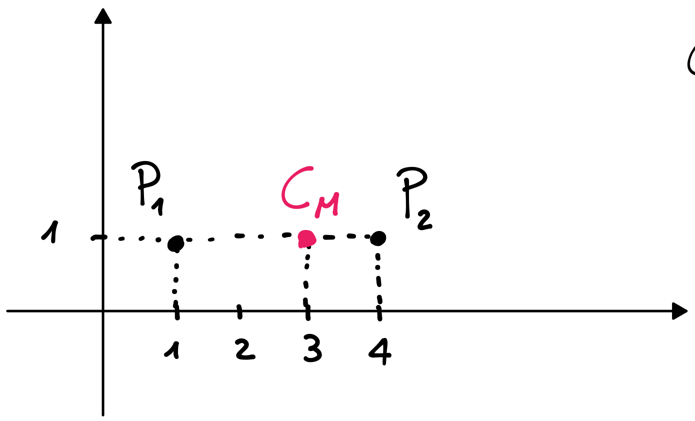
ESEMPIO

$P_1\,(1,1)\quad m_1 = 2\ kg$

$P_2\,(4,1)\quad m_2 = 4\ kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 4}{2+4} = \frac{18}{6} = 3$$

$$y_{CM} = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 1}{2+4} = 1$$



$C_M\,(3,1)$

VETTORE POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA

Per semplicità mi concentro su un sistema formato da 2 punti (ciò che diremo vale in generale per n punti)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}\qquad \text{POSIZIONE DEL } C_M$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{r}_{CM}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1\vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2\vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1+m_2} - \dfrac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1 \vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2 \vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1+m_2} - \dfrac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1\left[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right] + m_2\left[\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)\right]}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{m_1\left[\dfrac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t}\right] + m_2\left[\dfrac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1+m_2} =$$ la velocità di CM è la media ponderata delle velocità dei punti

$$= \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_1+m_2}$$ ← QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_1+m_2}}$$

Sempre partendo dai principi della dinamica, si dimostra che la velocità $\vec{v}_{cm}$ con cui si muove il centro di massa è data dalla formula

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{tot}}{m_{tot}}, \qquad [19]$$

in cui m_{tot} è la massa complessiva del sistema e $\vec{p}_{tot}$ è la quantità di moto totale.

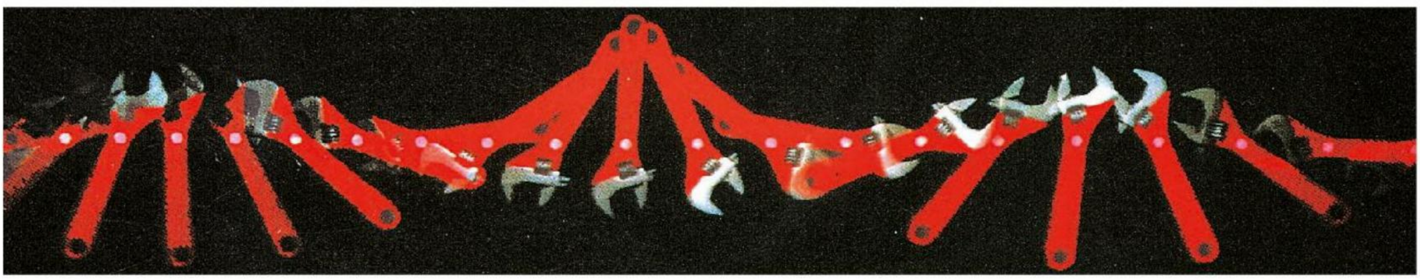
$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}$$

$$\boxed{m_{TOT}\,\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{TOT}}$$

SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, $\vec{P}_{TOT}$ SI CONSERVA (CIOÈ È COSTANTE), QUINDI $\vec{v}_{CM}$ È COSTANTE E IL C_M SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

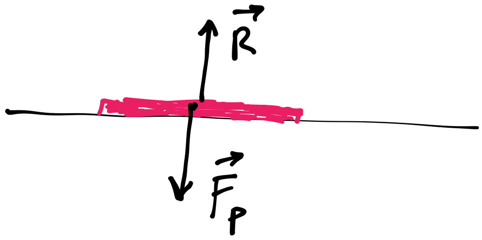
LE FORZE INTERNE NON CAMBIANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA (SOLO LE FORZE ESTERNE POSSONO FARLO)

CHIAVE INGLESE LANCIATA SU UN TAVOLO



R. Meana/Foundamental Photographs

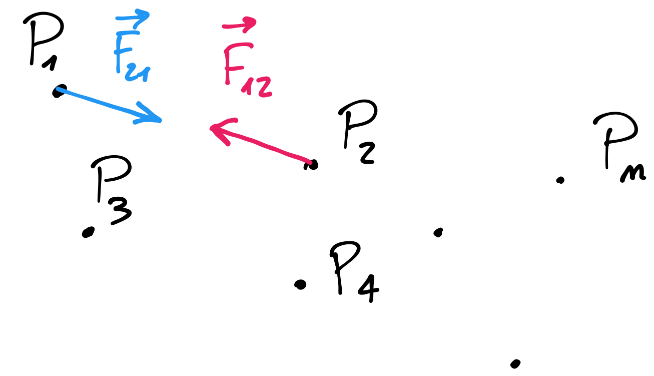
FORZE ESTERNE SONO IL PESO $\vec{F}_p$ E LA REAZIONE VINCOLARE $\vec{R}$ DEL PIANO DI APPOGGIO E SI HA $\vec{F}_p + \vec{R} = \vec{0}$



PUNTUALIZZAZIONE: $\underbrace{\text{FORZE INTERNE}}$ ED ESTERNE

↓

FORZE CON CUI PUNTI DEL SISTEMA AGISCONO SU ALTRI PUNTI DEL SISTEMA



FORZE INTERNE

$\vec{F}_{12}$ = forza con cui P_1 agisce su P_2

$\vec{F}_{21}$ = forza con cui P_2 agisce su P_1

per il III principio della dinamica $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$$\Rightarrow \underset{\text{SOMMA}}{\sum} \vec{F}_{INT} = \vec{0}$$

La somma delle forze interne è $\vec{0}$

VEDIAMO COSA ACCADE ALL'ACCELERAZIONE DEL CM

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{m_{TOT} \text{ MASSA TOTALE}}}$$

$$m_{TOT} \vec{a}_{CM} = \underbrace{\overbrace{m_1 \vec{a}_1}^{\vec{F}_1 \text{ (forza su } P_1)} + \overbrace{m_2 \vec{a}_2}^{\vec{F}_2 \text{ (forza su } P_2)}}_{\text{FORZA TOTALE}} = \underbrace{\sum \vec{F}_{INT}}_{\vec{0}} + \sum \vec{F}_{EST} = \sum \vec{F}_{EST}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{EST} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}}$$

SOLO LE FORZE ESTERNE INFLUENZANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI PAG. 499

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}}{m_1 + m_2}$$

$$m_{TOT} \vec{a}_{CM} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \frac{m_1 \Delta \vec{v}_1 + m_2 \Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} \Delta t = \Delta \vec{P}_{TOT}}$$