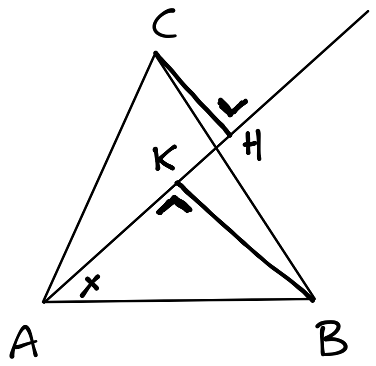
10/12/2018

**2.** Dato il triangolo equilatero $ABC$ di lato di misura $l$ conduci per il vertice $A$, internamente all'angolo $B\widehat{A}C$, una semiretta tale che la somma dei quadrati delle distanze $\overline{CH}$ e $\overline{BK}$ dei vertici $B$ e $C$ da essa sia $\frac{1}{2}l^2$. $[K\widehat{A}B = 30°]$




$0° \leq x \leq 60°$

$\overline{CH}^2 + \overline{BK}^2 = \frac{1}{2} l^2$

$\overline{BK} = \overline{AB} \cdot \sin x = l \sin x$

$\overline{CH} = \overline{AC} \cdot \sin(60° - x) = l \sin(60° - x)$

$\cancel{l^2} \sin^2(60° - x) + \cancel{l^2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cancel{l^2}$

$[\sin 60° \cos x - \cos 60° \sin x]^2 + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x\right]^2 + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$

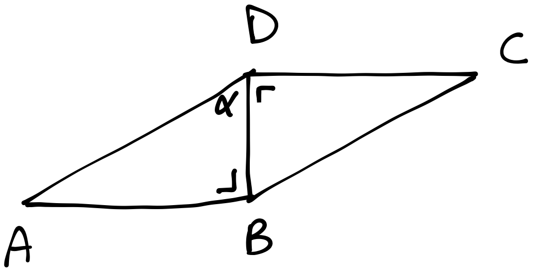
$5 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \cos x \sin x + 3 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \cos x \sin x + \cos^2 x = 0$

$3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$ $\quad (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 = 0$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \boxed{x = 30°}$

**3.** Determina la misura del perimetro del parallelogramma $ABCD$ nel quale la diagonale $BD$ è perpendicolare al lato $AB$, sapendo che la misura dell'area del parallelogramma è $\frac{5}{48}a^2$ e che la tangente dell'angolo $A\widehat{D}B$ è $\frac{5}{12}$. $\left[\frac{3}{2}a\right]$




$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{5}{48}a^2$$

$$\tan A\widehat{D}B = \frac{5}{12}$$

possiamo concentrarci sul triangolo ABD

$$\left(\mathcal{A}_{ABD} = \frac{5}{96}a^2\right)$$

NON SERVE...

$$\overline{DB}\cdot\tan\alpha = \overline{AB}$$

$$\begin{cases} \overline{DB}\cdot\frac{5}{12} = \overline{AB} \\ \overline{AB}\cdot\overline{DB} = \frac{5}{48}a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{12}\overline{DB}^2 = \frac{5}{48}a^2$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{DB}^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{DB} = \frac{a}{2}$$

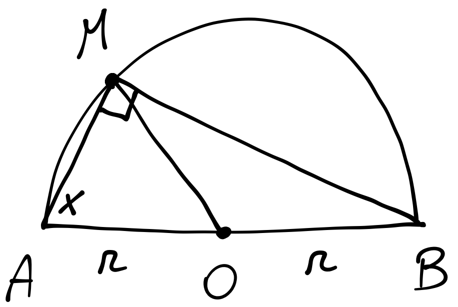
$$\begin{cases} \overline{DB} = \frac{a}{2} \\ \overline{AB} = \frac{5}{12}\cdot\frac{a}{2} = \frac{5}{24}a \end{cases}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{DB}^2} = \sqrt{\frac{25}{576}a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{25+144}{576}}\,a$$

$$= \frac{13}{24}a$$

$$2p_{ABCD} = 2\left(\frac{13}{24}a + \frac{5}{24}a\right) = \frac{18}{12}a = \boxed{\frac{3}{2}a}$$

**4.** È data una semicirconferenza di centro $O$ e diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina su di essa un punto $M$ tale che sia $2\overline{AM}^2 + 3\overline{AB}^2 = 4\overline{BM}^2 + 2\overline{MO}^2$. $[B\widehat{A}M = 60°]$




$0° \leq x \leq 90°$

$\overline{AM} = 2r\cos x \qquad \overline{MO} = r$

$\overline{BM} = 2r\sin x \qquad \overline{AB} = 2r$

$$8\cancel{r^2}\cos^2 x + 12\cancel{r^2} = 16\cancel{r^2}\sin^2 x + 2\cancel{r^2}$$

$$4\cos^2 x - 8\sin^2 x = -5$$

$$4(1-\sin^2 x) - 8\sin^2 x = -5$$

$$4 - 4\sin^2 x - 8\sin^2 x = -5$$

$$-12\sin^2 x = -9 \qquad \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60°$$

$-$ N.A. perché $0° \leq x \leq 90°$