

17/12/2018

EQUAZIONI DI 3° GRADO

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

$$z = x - \frac{a}{3} \quad (\text{SOST. DI VARIABILE})$$

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

(FORMULA DI CARDANO (1545) - ARS MAGNA)
 IN REALTÀ DONATA A TAVOLLA

Applicandola all'eq. $x^3 - 3x = 0$ (di soluzioni $0, \pm\sqrt{3}$)

$$p = -3 \\ q = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1}} \quad \text{che NON HA SENSO !!}$$

Eppure, se sostituiamo nell'eq. $x^3 - 3x = 0$ "facendo finta di niente" (denotiamo $\sqrt{-1} = i$)

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i})^3 - 3(\sqrt[3]{i} + \sqrt[3]{-i}) &= \\ = i + 3\sqrt[3]{-i^3} + 3\sqrt[3]{i^3} - i - 3\sqrt[3]{i} - 3\sqrt[3]{-i} &= 0 \end{aligned}$$

IDEA \rightarrow inventare un simbolo per $\sqrt{-1} = i$

i è tale che $i^2 = -1$ PER QUESTO NUMERO VOGLIAMO CHE VALGANO LE "REGOLE ORDINARIE" DELL'ALGEBRA!

VOGLIAMO INOLTRE AMPLIARE
IL SISTEMA NUMERICO \mathbb{R}
CON QUESTO NUOVO NUMERO i

OSSERVAZIONE $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
 $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$
 $i^5 = i^4 \cdot i = i$
....

Quindi il nuovo insieme numerico, detto **INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI** \mathbb{C} basta che contenga oggetti del tipo

$$\boxed{a + ib} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ perché $a + ib$ è REALE se e solo se $b = 0$

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni in \mathbb{R} ,
ma ha 2 soluzioni in \mathbb{C} : $\pm i$, infatti $i^2 + 1 = 0$ e
 $(-i)^2 + 1 = 0$

COME SI DOVREBBERO COMPORARE LA SOMMA E IL
PRODOTTO DI NUMERI COMPLESSI

$$z_1 = a + ib \quad z_2 = c + id \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$z_1 + z_2 = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \quad \text{SOMMA}$$

$$z = \underbrace{a}_{\substack{\text{PARTE REALE} \\ \text{DI } z}} + i \underbrace{b}_{\substack{\text{PARTE IMMAGINARIA} \\ \text{DI } z}}$$
$$a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Il numero i si chiama UNITÀ IMMAGINARIA ($i^2 = -1$)

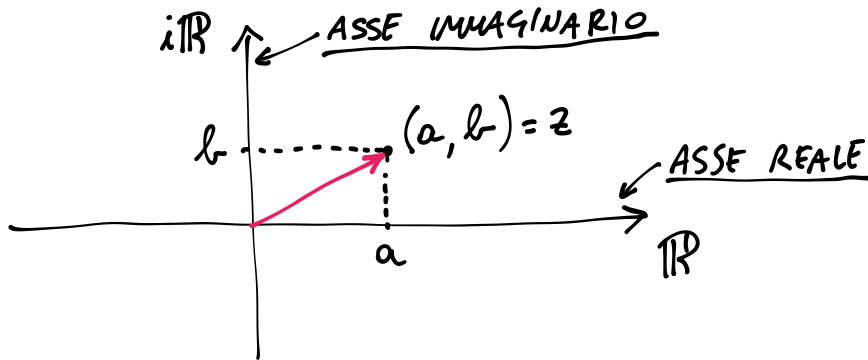
$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + ied + ibc + i^2bd =$$
$$= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

INTRODUZIONE FORMALE DI \mathbb{C}

DEFINIZIONE

Chiamiamo **numero complesso** ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

Possiamo anche dire che un numero complesso è un qualsiasi elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



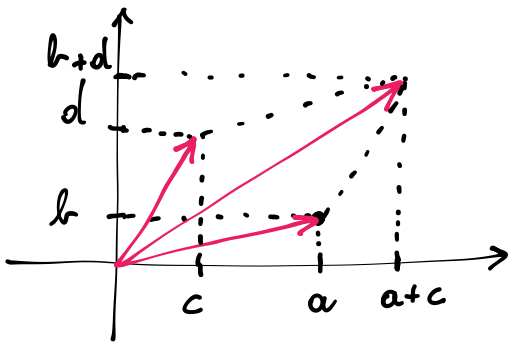
DEFINIZIONE

Somma di numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, la loro somma è il numero complesso definito dalla coppia $(a + c; b + d)$.

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

↑
REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



- VALE LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA
- L'ELEMENTO NEUTRO È $(0, 0)$
 $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- L'OPPOSTO DI (a, b) È $(-a, -b)$

DEFINIZIONE

Prodotto di due numeri complessi

Dati due numeri complessi $(a; b)$ e $(c; d)$, il loro prodotto è il numero complesso definito dalla coppia $(ac - bd; ad + bc)$.

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

IDENTIFICHIAMO I NUMERI DEL TIPO $(a, 0)$ CON I NUMERI REALI

$$(a, 0) \longmapsto a$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) \longmapsto a \cdot b$$

\Downarrow

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0, a \cdot 0 - 0 \cdot b) = (ab, 0)$$

Prendiamo il numero $(0, 1)$ e facciamo come il quadrato

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \longmapsto -1$$

$$(0, 1) = i \quad i^2 = -1 \quad i = \text{UNITÀ IMMAGINARIA}$$

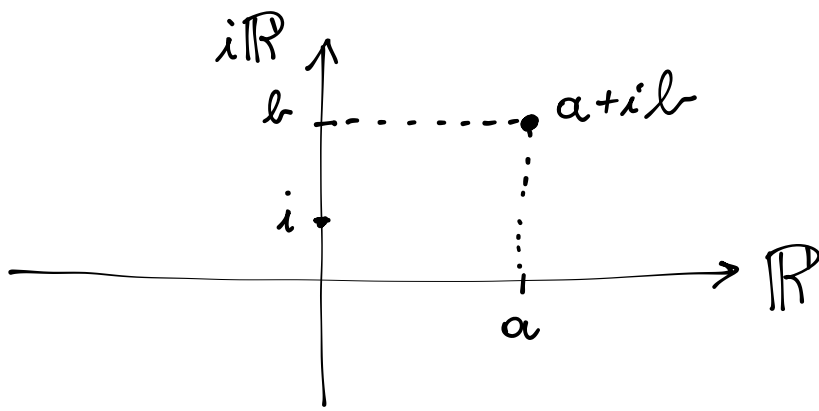
$$(a, b) = (a, 0) + \overbrace{(0, 1)}^i (b, 0)$$

$b \in \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$

$(a, b) = a + i b$

 FORMA
ALGEBRICA
DEL NUMERO
COMPLESSO (a, b)



$$z = (a, b) = a + ib$$

} numeri del tipo $(a, 0) = a + i \cdot 0 = a$ sono numeri reali

} numeri del tipo $(0, b) = 0 + ib = ib$ sono numeri immaginari