5/11/2019

PUNTO DELLA SITUAZIONE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ NUMERI NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ NUMERI INTERI (RELATIVI)

$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ NUMERI RAZIONALI

$\downarrow$

$-1 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad -\frac{5}{4} \quad \frac{11}{17} \quad 7 \quad \dots$

I numeri razionali, scritti in forma decimale, sono FINITI o ILLIMITATI PERIODICI

Se considero il numero $0,1010010001000001\dots$ esso non è periodico, quindi non è razionale. Che tipo di numero è?

Si chiama NUMERO IRRAZIONALE

COSTANTE DI NEPERO

Altri irrazionali sono $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \sqrt{6}, \sqrt{11}, -\pi, \pi + 1$

TEOREMA $\sqrt{2}$ È IRRAZIONALE, cioè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Devo dimostrare che non esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione procede PER ASSURDO $\left[\begin{array}{c} \text{PREMESSA} \\ \downarrow \\ \text{CONTRADDIZIONE} \end{array} \Rightarrow \text{PREMESSA FALSA} \right]$

Suppongo che esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$
con p, q primi tra loro (in modo che $\frac{p}{q}$ sia ridotta ai minimi termini)

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ è PARI}$$

$\Rightarrow$ p è PARI (perché se fosse dispari, anche p^2 sarebbe dispari)

posso scrivere $p = 2n$

$\Rightarrow$ Da $p^2 = 2q^2$ ottengo $(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ divido per 2 entrambi i membri $2n^2 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ è PARI $\Rightarrow q$ è PARI

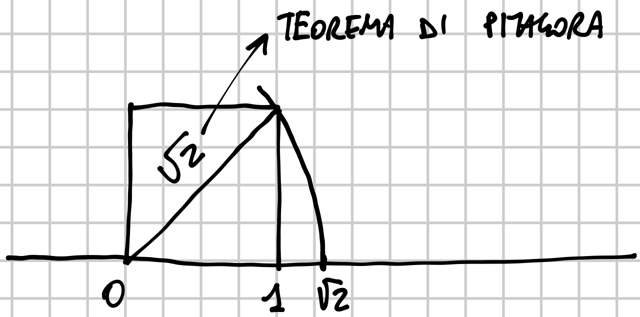
Quindi p e q sono entrambi pari. Allora siamo giunti alla seguente CONTRADDIZIONE (p, q primi tra loro) e $\underbrace{(p, q \text{ NON primi tra loro})}_{\text{perché entrambi PARI}}$

Ne deduciamo che la premessa ($\exists\, p,q \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$) è falsa, cioè NON ESISTONO $p,q \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

Dunque $\sqrt{2}$ è IRRAZIONALE C.V.D.

C.V.D. = Come volevasi dimostrare

Q.E.D. = QUOD ERAT DEMONSTRANDUM



$\mathbb{Q}$ NON BASTA perché non mi fornisce alcun numero che rappresenti la misura della diagonale del quadrato di lato 1.

In più, siccome vogliamo associare un numero ad ogni punto della retta, se avessimo solo $\mathbb{Q}$ otterremmo una retta "bucata". $\rightarrow$ CI SERVONO I <u>NUMERI IRRAZIONALI</u>

$\downarrow$

DECIMALI ILLIMITATI NON PERIODICI

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x \mid x \text{ È IRRAZIONALE}\}$$

<u>NUMERI REALI</u>

$\hookrightarrow$ COMPLETANO LA RETTA (è possibile assegnare ad ogni punto di una retta uno e un solo numero reale)