20/2/2020

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

107 In $A = \{12, 112, 22, 40, 111\}$, «la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y».

$xRy \iff$ la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y

1) RIFLESSIVITÀ $\forall x \in A \quad xRx$

xRx perché la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di x (BANALE).

2) SIMMETRIA $\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$

xRy sia n la somma delle cifre di x, allora n è anche la somma delle cifre di y. Quindi sia x che y hanno somma delle cifre uguale a n $\Rightarrow yRx$.

3) TRANSITIVITÀ $\forall x, y, z \in A \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Siano xRy e yRz, allora x e y hanno la somma delle cifre uguale, chiamiamola n. Siccome yRz, anche y e z hanno somma delle cifre uguale, ma non può essere altro che n. Quindi sia x che z hanno n come somma delle cifre. Quindi xRz.

CLASSI DI EQUIVALENZA $\quad [12] = \{12, 111\} = [111]$

$[112] = \{112, 22, 40\} = [22] = [40]$

$A/_R = \{[12], [112]\}$ INSIEME QUOZIENTE

107 In $A = \{12, 112, 22, 40, 111\}$, «la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y».

RISOLUZIONE ALTERNATIVA

$$R = \{(12,111), (111,12), (12,12), (111,111), (112,112), (22,22), (40,40), (112,22), (22,112), (112,40), (40,112), (22,40), (40,22)\}$$

<u>RIFL.</u> $\Rightarrow$ Devo controllare che R contenga le coppie $(12,12)$, $(111,111)$ ....

<u>SIMM.</u> $\Rightarrow$ $(12,111) \rightarrow (111,12)$ devo controllare che, <u>per ogni</u> coppia del tipo (a,b), c'è anche (b,a)

<u>TRANS.</u> $\Rightarrow$ $(112,40)$ e $(40,22) \rightarrow (112,22)$

devo controllare che, <u>per ogni</u> coppia del tipo (a,b) e un'altra del tipo (b,c), c'è anche (a,c)

110 Nell'insieme $A = \{a, b, c\}$, considera la relazione R che ha la seguente rappresentazione per elencazione: $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$

R è una relazione d'equivalenza? In caso affermativo determina le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.

1) <u>RIFLESSIVITÀ</u>, $\forall x \in A \quad xRx \qquad [\forall x \in A \quad (x,x) \in R]$

SÌ perché contiene (a,a), (b,b) e (c,c)

2) <u>SIMMETRIA</u>, $\forall x, y \in A \quad xRy \rightarrow yRx$

SÌ, perché ci sono (a,b) e (b,a). a e b sono gli <u>UNICI</u> elementi di A diversi tra loro è in relazione tra loro.

Se ci fosse stato (a,c), ma non (c,a), non sarebbe stato simmetrico

3) <u>TRANSITIVA</u>, $\forall x, y, z \in A \quad xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

SÌ $\quad (a,b) \wedge (b,b) \xrightarrow{?} (a,b)$ ok

$(a,a) \wedge (a,b) \xrightarrow{?} (a,b)$ ok

$(c,c) \wedge (c,c) \xrightarrow{?} (c,c)$ ok

.....

Se ci fosse stato (a,c) non sarebbe transitiva, perché avremmo (b,a) e (a,c) ma <u>non</u> (b,c).

<u>CLASSI DI EQUIVALENZA</u>

$[a] = \{a, b\} \qquad [c] = \{c\}$

<u>INSIEME QUOZIENTE</u>

$A/_R = \{[a], [c]\}$

111 Stabilisci se le relazioni nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ rappresentate nelle figure sono *relazioni d'equivalenza*. In caso affermativo, determina le classi di equivalenza.

R	1	2	3	4	5
1	×	×			
2	×	×			
3			×	×	
4			×	×	
5					×

Figura a

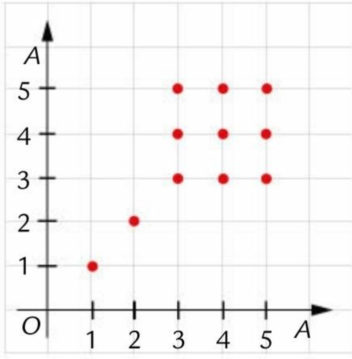


Figura b

R	1	2	3	4	5
1	×		×		
2		×			
3	×		×	×	
4			×	×	
5					×

Figura c

[Le relazioni rappresentate nelle **Figg. a** e **b** sono d'equivalenza; la relazione rappresentata in **Fig. c** invece non è d'equivalenza]

1] RIFLESSIVA, SIMMETRICA, TRANSITIVA $\Rightarrow$ è di equivalenza

2] RIFL., SIMM., TRANS. $\Rightarrow$ è di equivalenza

3] RIFLESSIVA, SIMMETRICA

NON è TRANSITIVA perché abbiamo, ad es., $(4,3)$ e $(3,1)$, ma non $(4,1)$

DEFINIZIONE | **Relazione d'ordine**

Una relazione, definita in un insieme, si chiama **d'ordine** quando è **antisimmetrica** e **transitiva**. Se la relazione è anche **riflessiva** diremo che è di ordine **largo**, se è **antiriflessiva** diremo che è di ordine **stretto**.

$A = \mathbb{R}$ $\leq$ relazione d'ordine largo
- RIFLESSIVA
- ANTISIMMETRICA
- TRANSITIVA

infatti:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \leq x$ RIFLESSIVITÀ
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \neq y \wedge x \leq y \Rightarrow y \nleq x$ ANTISIMMETRIA
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ TRANSITIVITÀ

$A = \mathbb{R}$ $<$ relazione d'ordine stretto
- ANTIRIFLESSIVA
- ANTISIMMETRICA
- TRANSITIVA

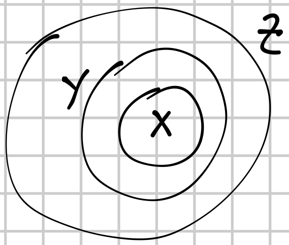
- $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \nless x$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \neq y \wedge x < y \Rightarrow y \nless x$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

<u>ESEMPIO DI RELAZIONE D'ORDINE LARGO</u>

$A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ FAMIGLIA DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{N}$

$XRY \iff X \subseteq Y$ relazione di inclusione (sottoinsieme)

- $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \subseteq X$ SÌ, RIFLESSIVA
- $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \neq Y \wedge X \subseteq Y \Rightarrow Y \nsubseteq X$ SÌ, ANTISIMM.
- $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad X \subseteq Y \wedge Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ SÌ, TRANSITIVA



A differenza della relazione $\leq$ fra numeri, l'inclusione $\subseteq$ non è una <u>RELAZIONE D'ORDINE TOTALE</u>, poiché presi due qualunque $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, non si ha necessariamente che $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$. Ad es.

$$X = \{1, 2, 3\} \qquad Y = \{1, 4, 5\} \qquad X \nsubseteq Y \text{ e } Y \nsubseteq X$$

X e Y non sono confrontabili.

Mentre due numeri sono <u>sempre</u> confrontabili. $\leq$ è di <u>ORDINE TOTALE</u>

$\subseteq$ è di <u>ORDINE PARZIALE</u>

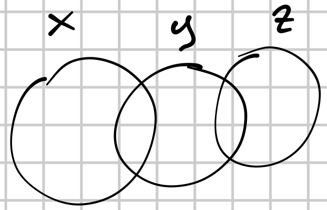
124 Nell'insieme delle circonferenze di un piano, «x ha qualche punto in comune con y».

È relazione d'ordine? NO

È riflessiva.

è simmetrica

NON è transitiva



xRy e yRz, ma $x \not R z$

130 In N, «x è il quadrato di y».

$\forall x,y \in \mathbb{N} \quad xRy \iff x = y^2$

- non è riflessiva, poiché in generale $x \not R x$, cioè $x \neq x^2$ (solo 0 e 1 sono tali che $x = x^2$)
- è antisimmetrica $\quad x \neq y$ e $x = y^2 \Rightarrow y \neq x^2$
- è transitiva? $\quad x = y^2$ e $y = z^2 \overset{?}{\Longrightarrow} x = z^2$ NO, perché $x = y^2 = (z^2)^2 = z^4$

NO

132 Nell'insieme $\mathbf{N} - \{0\}$, «x è multiplo di y».

- RIFLESSIVA perché ogni numero è multiplo di sé stesso

- ANTISIMMETRICA x è multiplo di y e $x \neq y$, allora $x = \underset{\in \mathbb{N}}{n} \cdot y$, e dunque y NON è multiplo di x perché $y = \underset{\notin \mathbb{N}}{\frac{1}{n}} x$

- TRANSITIVA x è multiplo di $y \Rightarrow x = ny \quad (n \in \mathbb{N})$

  y è multiplo di $z \Rightarrow y = mz \quad (m \in \mathbb{N})$

x è multiplo di z? $x = ny = \underbrace{(n\, m)}_{\in \mathbb{N}} z$ sì

È una relazione d'ordine PARZIALE (due qualsiasi numeri naturali non sono necessariamente uno il multiplo dell'altro, ad es. 6 e 15)