21/2/2020

153 In ciascuno dei seguenti insiemi, stabilisci se la relazione «*x* divide *y*» è una relazione di ordine parziale o totale.

a. $\mathbf{N} - \{0\}$

b. l'insieme dei multipli di 3 diversi da zero

c. $\{5, 10, 15, 20\}$

d. l'insieme delle potenze di 2 con esponente intero non negativo

e. $\{5, 10, 20, 40\}$

$\forall x, y \in A \quad xRy \iff$ "x divide y" $\iff$ "y è multiplo di x"

La relazione d'ordine è TOTALE sse $\forall x, y \in A \quad xRy \lor yRx$ ("o")

a) $A = \mathbb{N} - \{0\}$ PARZIALE perché ad es. 2 e 7 <u>non</u> sono in relazione

$2 \not R 7$ e $7 \not R 2$

2 non divide 7   7 non divide 2

b) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$ PARZIALE es. 6 9

c) $A = \{5, 10, 15, 20\}$ PARZIALE es. 10 15

d) $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots\}$

ORDINE TOTALE $\forall x, y \in A$ x divide y o y divide x

DIMOSTRAZIONE FORMALE del fatto che in d) c'è ordine totale

Dati due elementi $x, y \in A$, si ha $x = 2^n$ e $y = 2^m$ per certi $n, m \in \mathbb{N}$. Si distinguono i casi:

- $n = m \Rightarrow x = y$ e x divide y
- $n > m \Rightarrow x = 2^n > 2^m = y$ e y divide x

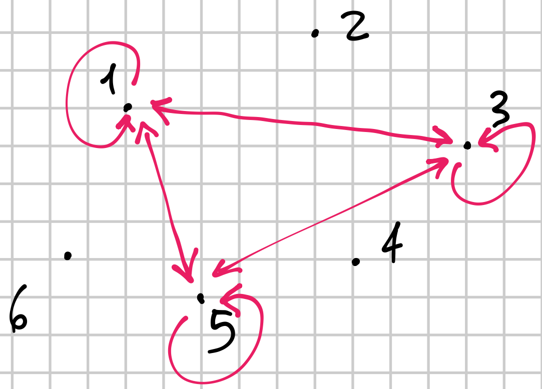
$$x = 2^n = 2^{n-m} \cdot 2^m = 2^{n-m} \cdot y$$

- $n < m \Rightarrow$ ragionamento analogo e x divide y ...

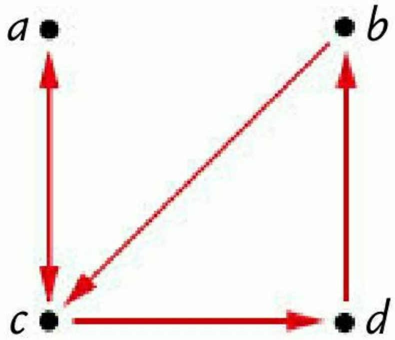
e) $A = \{5, 10, 20, 40\}$ TOTALE perché $\forall x, y \in A$ x divide y $\vee$ y divide x

$$5 \to 5 \cdot 2^0 \quad 10 \to 5 \cdot 2^1 \quad 20 \to 5 \cdot 2^2 \quad 40 \to 5 \cdot 2^3$$

149 Rappresenta mediante un grafo la relazione «il prodotto tra x e y è un numero dispari», definita nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



150 Stabilisci se la relazione rappresentata nel seguente grafo è riflessiva, antiriflessiva, simmetrica, antisimmetrica o transitiva. Se la relazione non soddisfa una di queste proprietà, fornisci un controesempio.



1) RIFLESSIVA: NO $a \not\mathrel{R} a$

2) ANTIRIFLESSIVA: SÌ $\forall x \in A \quad x \not\mathrel{R} x$

3) SIMMETRICA: NO $c R d$, ma $d \not\mathrel{R} c$

4) ANTISIMMETRICA: NO $a \neq c$ e $a R c$ e $c R a$

5) TRANSITIVA: NO $d R b$ e $b R c$, ma $d \not\mathrel{R} c$