19/9/2019

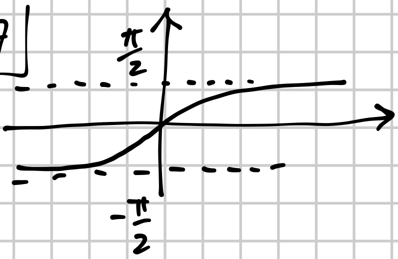
437 $f(x) = -\arctan\frac{2}{x}$ $\left[f^{-1}(x) = -\frac{2}{\tan x}\right]$

438 $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ $\left[f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}\right]$

439 $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$ $\left[f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x}+1}\right]$

Calcolare la funz. inversa

437



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f : D \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

non è l'insieme immagine perché 0 non è immagine di alcun elemento (è un codominio, andava bene anche $\mathbb{R}$)

$$y = -\arctan\frac{2}{x}$$

$$x = -\arctan\frac{2}{y}$$

$$-x = \arctan\frac{2}{y}$$

$$\tan(-x) = \tan\left(\arctan\frac{2}{y}\right)$$

$$-\tan x = \frac{2}{y} \qquad y = -\frac{2}{\tan x}$$

$x \neq 0$

Il dominio di $f^{-1}(x) = -\frac{2}{\tan x}$ è $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

perché f^{-1} è l'inversa di f che ha come insieme immagine proprio $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad f^{-1} : \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} - \{0\}$$

438) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ $\qquad f:(0,1]\rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$\mathbb{R}_0^+ = [0,+\infty)$

$$\frac{1-x}{x}\geq 0$$

$1-x>0 \Rightarrow x<1$

$x>0 \Rightarrow x>0$

		0		1	
$1-x$	+		+	0	−
x	−	$\times$	+	|	+
$\frac{1-x}{x}$	−	$\times$	+	0	−

$0<x\leq 1$

$$y=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

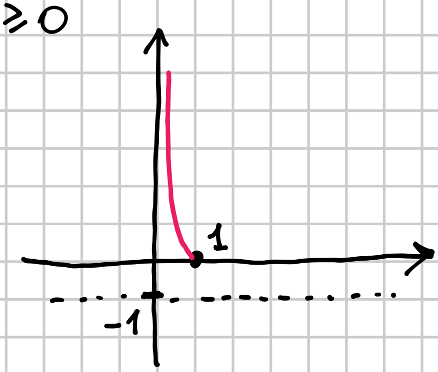
$$x=\sqrt{\frac{1-y}{y}} \qquad x^2=\frac{1-y}{y} \qquad x^2=\frac{1}{y}-1 \qquad \frac{1}{y}=x^2+1$$

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad f^{-1}(x)=\frac{1}{x^2+1} \qquad f^{-1}:[0,+\infty)\rightarrow(0,1]$$

OSSERVAZIONI SULL'INSIEME IMMAGINE

Per calcolare l'insieme immagine non c'è un procedimento "standard". Facciamo le seguenti considerazioni, a partire dal dominio

$$0<x\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x}\geq 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x}-1}_{\frac{1-x}{x}}\geq 0$$



quindi $\dfrac{1-x}{x}\geq 0$ da cui $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\geq 0$

È importante avere presente i grafici delle funzioni elementari!

439)

$$f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$$

$$D = (0, e) \cup (e, +\infty)$$

$$f : (0, e) \cup (e, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y = \frac{1}{\ln x - 1}$$

$$x = \frac{1}{\ln y - 1} \qquad \frac{1}{x} = \ln y - 1 \qquad \ln y = \frac{1}{x} + 1$$

$$y = e^{\frac{1}{x} + 1}$$

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{x} + 1}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow (0, e) \cup (e, +\infty)$$

Per "calcolare" l'insieme immagine di f