27/9/2019

INTORNO (COMPLETO) DI $x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad I(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$

$\downarrow$ INTERVALLO APERTO CHE CONTIENE x_0 $\qquad \delta_1, \delta_2 > 0$

INTORNO DI $+\infty$ $\qquad I(+\infty) = (a, +\infty) \quad a \in \mathbb{R}$

INTERVALLO APERTO ILLIMITATO SUPERIORMENTE

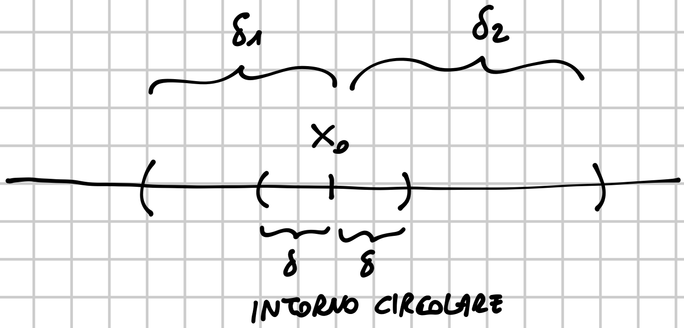
INTORNO DI $-\infty$ $\qquad I(-\infty) = (-\infty, b) \quad b \in \mathbb{R}$

INTERV. APERTO ILLIMITATO INF.

INTORNO DESTRO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad I^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \quad \delta > 0$

INTORNO SINISTRO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad I^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \quad \delta > 0$

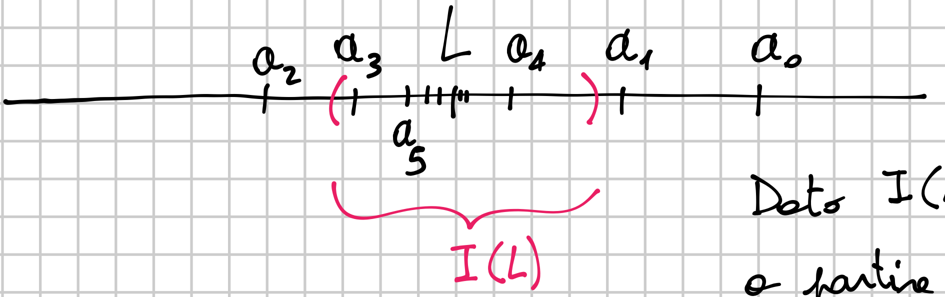
$\to$ NON CONTENGONO x_0



$\{a_n\}$ successione $\qquad L \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$ sse $\quad \forall I(L)$ (intorno di L) $\exists M > 0$:

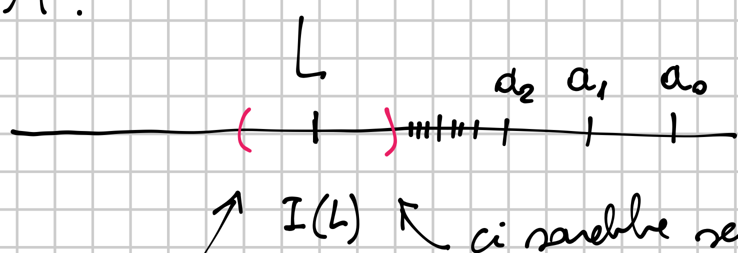
$$\forall n > M \qquad a_n \in I(L)$$



Dato $I(L)$ esiste un indice M a partire dal quale tutti i termini della successione (con $n > M$) sono in $I(L)$?

Sì, ad es. $M = 2$

Se esistesse un intorno di L tale che non fosse vero che tutti i termini della successione stanno in tale intorno a partire da qualche M:



Si potrebbe creare una situazione di questo genere

ci sarebbe sempre una distanza (pari almeno al raggio dell'intorno) tra L e i termini della successione

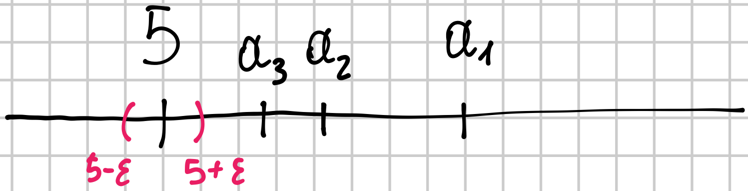
$\downarrow$

a_n non converge a L !!

ESEMPIO

$$a_n = 5 + \frac{1}{n} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = 5$$

$$\forall I(5) \quad \exists M : \quad \forall n > M \quad 5 + \frac{1}{n} \in I(5)$$



Considero gli intorni del tipo $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$ $\quad \varepsilon > 0$ (pensato "piccolo")

Prendere $\varepsilon > 0$ equivale a prendere un intorno

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \quad \forall n > M \quad 5 + \frac{1}{n} \in (5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$$

$$5 - \varepsilon < 5 + \frac{1}{n} < 5 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \left(5 + \frac{1}{n}\right) - 5 < \varepsilon$$

$$\Big| \underbrace{\left(5 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n} - \underbrace{5}_{L} \Big| < \varepsilon$$

Nuova definizione di limite di una successione convergente

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \qquad L \in \mathbb{R}$ sse

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 : \forall n > M \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Riprendiamo l'esempio $a_n = 5 + \frac{1}{n}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 5$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \ : \ \forall n > M \quad \underbrace{\left| \left(5 + \frac{1}{n}\right) - 5 \right| < \varepsilon}_{\frac{1}{n} < \varepsilon}$$

Se scelgo vari valori per ε, a ciascuno di essi si può associare un M che va bene....

$\varepsilon = 1$ $\qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ basta prendere $M = 1$

$\frac{1}{n} < 1 \iff n > 1$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \iff n > 100$ $\qquad M = 100$

$\varepsilon = \frac{1}{100\,000}$ $\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{100\,000} \iff n > 100\,000$ $\qquad M = 100\,000$

se anche prendo $M = 200\,000$, va bene lo stesso!