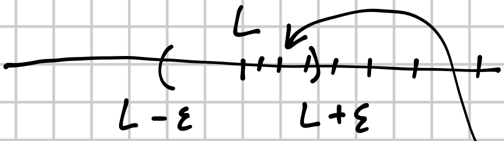
1/10/2019

DEFINIZIONE DI LIMITE DI SUCCESSIONE CONVERGENTE

$\{a_n\}$ successione $\quad L \in \mathbb{R}$

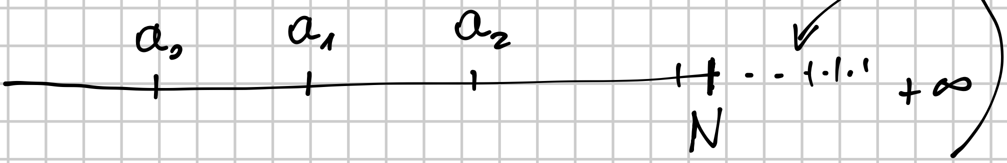
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall n > M \ |a_n - L| < \varepsilon$$



da un certo punto in poi tutti i termini della successione stanno qui dentro

DEFINIZIONE DI LIMITE DI SUCCESSIONE DIVERGENTE (A $+\infty$ O A $-\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

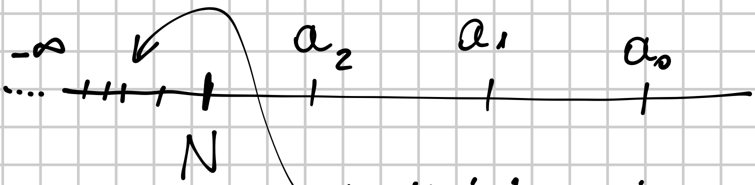


$$\Updownarrow$$

$$\forall N > 0 \quad \exists M > 0 : \forall n > M \quad a_n > N$$

tutti i termini successivi stanno qui

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$



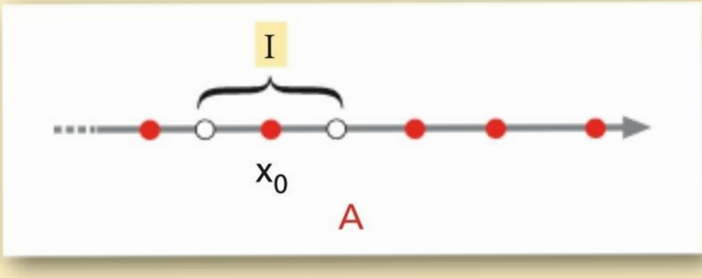
tutti i termini successivi stanno qui

$$\Updownarrow$$

$$\forall N < 0 \quad \exists M > 0 : \forall n > M \quad a_n < N$$

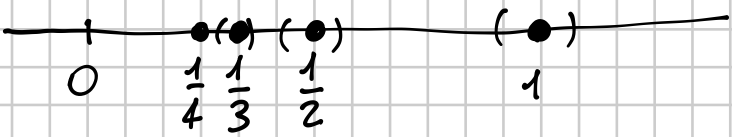
DEFINIZIONE

Sia x_0 appartenente a un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$. x_0 è un **punto isolato** di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0.



ESEMPI

1) $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \}$

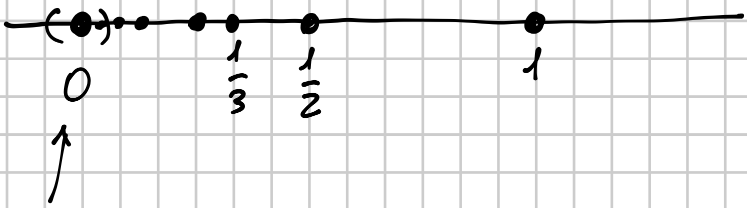


SONO TUTTI PUNTI ISOLATI DI A

Ogni punto di A è isolato, perché per ogni punto di A riesco a trovare un intorno che non contiene altri punti di A

isolato di A

2) $A' = A \cup \{0\}$

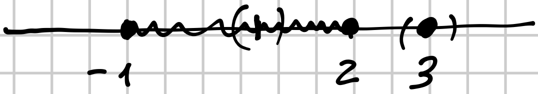


Tutti i punti diversi da 0 sono, come prima, isolati di A.

0 NON È UN PUNTO ISOLATO DI A

perché ogni intorno di 0 contiene infiniti punti di A diversi da 0

3) $A = [-1, 2] \cup \{3\}$



3 è l'unico punto isolato di A

4) $A = (1, 5]$ non ha punti isolati

DEFINIZIONE

Il numero reale x_0 è un **punto di accumulazione** di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

(ATTENZIONE, non necessariamente x_0 deve appartenere ad A)

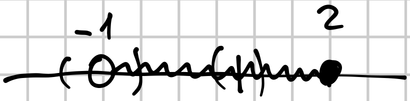
ESEMPI

1) $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \}$

0 è PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A

2) $A = (-1, 2]$

tutti i punti di A sono di accumulazione per A



$\forall I$ intorno di -1 ci sono infiniti punti di A che ci cadono dentro

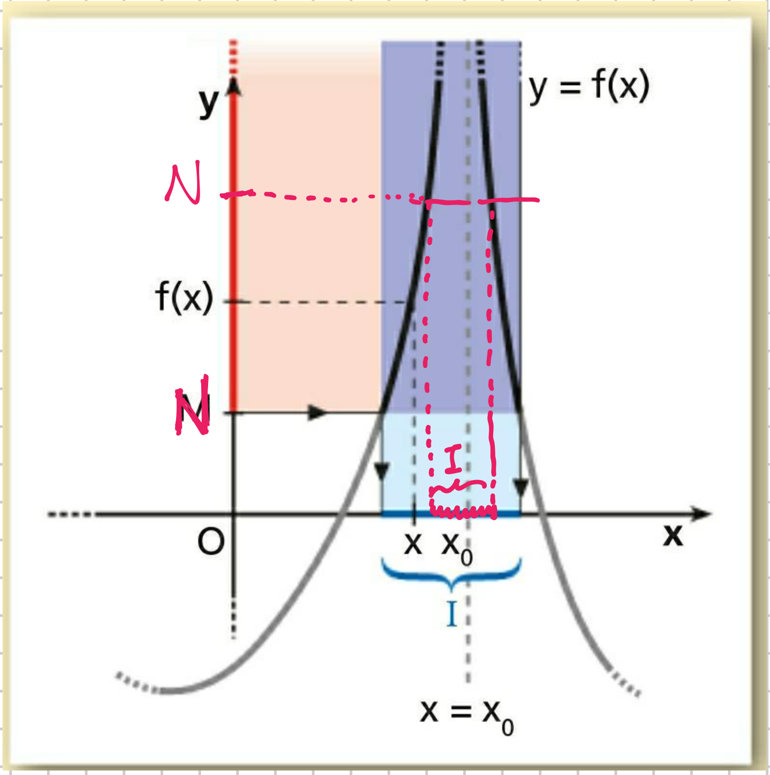
Ma anche -1 è di accumulazione per A, anche se $-1 \notin A$

Infatti ogni intorno di -1 contiene infiniti punti di A

Sia f una funzione reale

$$f: A \to \mathbb{R}$$

x_0 è di accumulazione per A



Si ha che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

se e solo se

$$\forall N > 0 \quad \exists I(x_0) \quad : \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\} \quad f(x) > N$$

(INTORNO DI x_0)

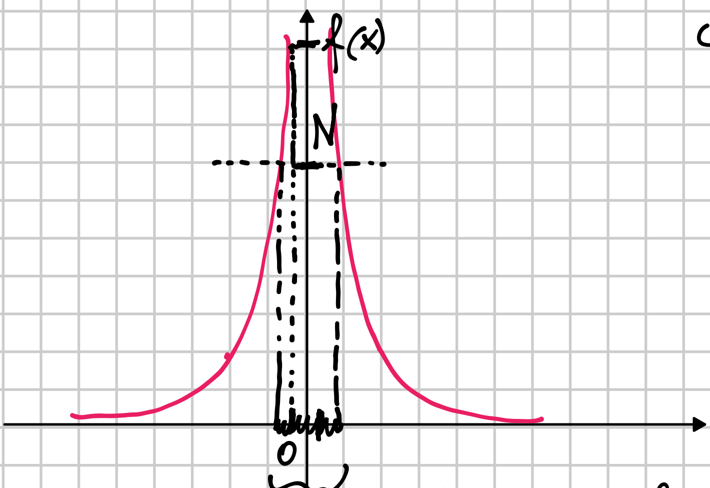
ESEMPIO

$$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{dom } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

DOMINIO

0 è punto di accumulazione per il dominio, quindi ha senso considerare $\lim_{x \to 0} f(x)$



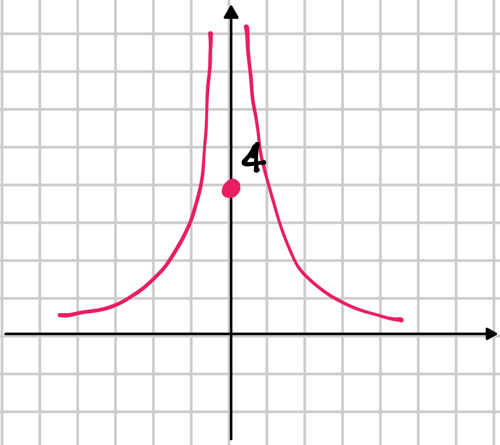
$I(0)$ intorno di 0 che va bene in corrispondenza di N

Fissato $N > 0$, qualsiasi $x \in I(0) - \{0\}$ è tale che $f(x) > N$. Dunque

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

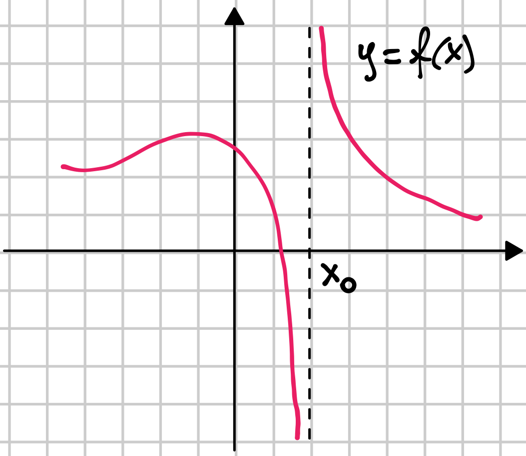
Se

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{dom } g = \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

GENERALIZZIAMO



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ <u>NON ESISTE</u> (secondo l'impostazione Dossena si può scrivere che il limite è ∞)

ma esistono i limiti destro e sinistro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

NON CONTIENE x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \quad \text{sse} \quad \forall N > 0 \ \exists I^+(x_0) : \forall x \in I^+(x_0) \quad f(x) > N$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad \text{sse} \quad \forall N > 0 \ \exists I^-(x_0) : \forall x \in I^-(x_0) \quad f(x) < -N$$