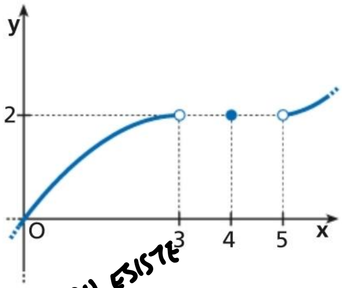
8/10/2019

COMPLETA osservando i grafici di $y = f(x)$.

178



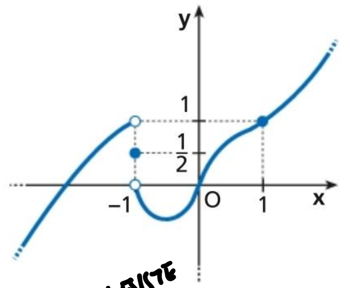
$\lim_{x\to4} f(x) =$ NON ESISTE; $\lim_{x\to3} f(x) = \boxed{2}$;

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \boxed{2}$; $\lim_{x\to5^+} f(x) = \boxed{2}$.

4 NON è di accumulazione

COINCIDE CON IL LIMITE SINISTRO $(x\to3^-)$

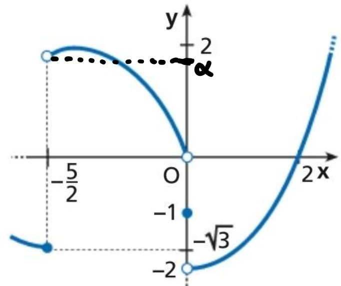
179



$\lim_{x\to-1} f(x) =$ NON ESISTE; $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \boxed{0}$;

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \boxed{1}$; $\lim_{x\to1} f(x) = \boxed{1}$.

180



$\lim_{x\to0^-} f(x) = \boxed{0}$; $\lim_{x\to2} f(x) = \boxed{0}$;

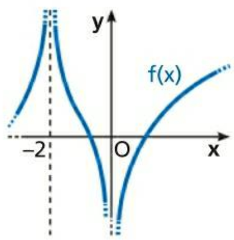
$\lim_{x\to0^+} f(x) = \boxed{-2}$; $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x) = \boxed{\alpha}$.

con $\alpha < 2$

$f(0) = -1$

LEGGI IL GRAFICO Deduci i limiti indicati osservando le figure.

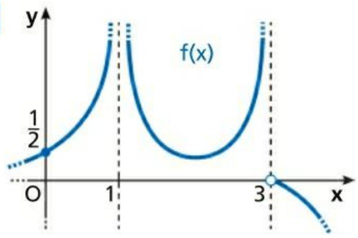
215



$\lim_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim_{x\to0^-} f(x)$;

$\lim_{x\to-2^+} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

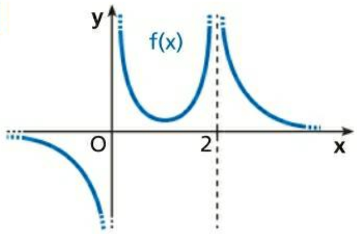
216



$\lim_{x\to1^-} f(x)$; $\lim_{x\to3^-} f(x)$;

$\lim_{x\to1^+} f(x)$; $\lim_{x\to3^+} f(x)$.

217



$\lim_{x\to0^-} f(x)$; $\lim_{x\to2^-} f(x)$;

$\lim_{x\to0^+} f(x)$; $\lim_{x\to2^+} f(x)$.

$\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to3^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to3} f(x)$ NON ESISTE

$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0} f(x)$ NON ESISTE

oppure

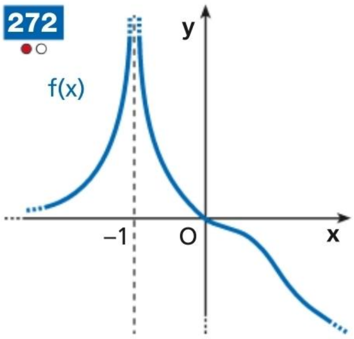
$\lim_{x\to0} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$

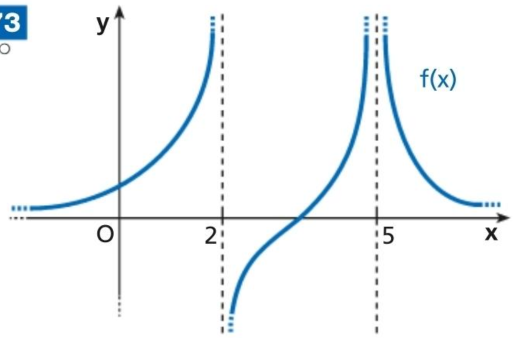
$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$

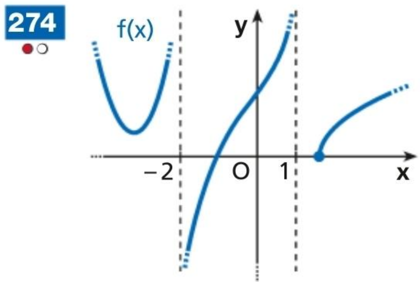
272



273



274



ASINTOTO VERT.

$x=-1 \quad \lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

ASINTOTO ORIZZONTALE

$y=0$ PER $x \to -\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

ASINTOTI VERTICALI

$x=2 \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$

$x=5 \quad \lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$

ASINTOTO ORIZZONTALE

sia per $x\to -\infty$ che per $x \to +\infty$

$y=0$ per $x \to \pm\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

ASINTOTI VERTICALI

$x=-2 \quad \lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

$x=1 \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

COINCIDE

$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

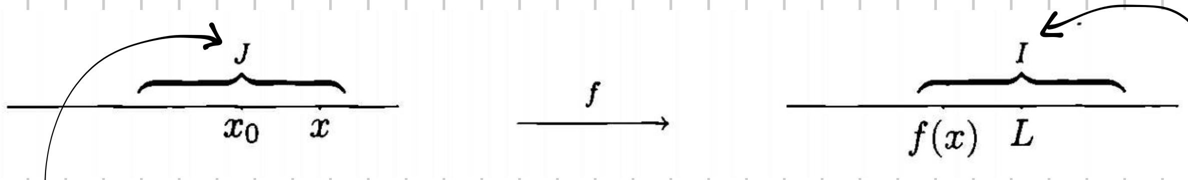
Definizione. *Siano $A \subseteq \mathbf{R}$ e x_0 un elemento della retta estesa $[-\infty, +\infty]$ oppure della retta estesa mediante un punto. Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione per A quando ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A distinto da x_0.* □

Ipotesi. *Il punto x_0 è di accumulazione per* $\operatorname{dom} f$. □

DEFINIZIONE GENERALE DI LIMITE

Definizione. *Siano A un sottoinsieme di $\mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione e x_0 e L due elementi della retta estesa $[-\infty, +\infty]$ o della retta estesa mediante un punto. Diciamo che $f(x)$ tende a L per x tendente a x_0 quando per ogni intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in A \cap J \setminus \{x_0\}$ si abbia $f(x) \in I$.* □

VEDI (*)



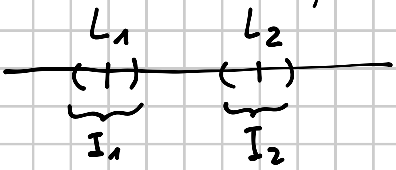
si trova come conseguenza di I

si sceglie per primo

4.4. Teorema di unicità del limite. *Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$, $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione, x_0 un punto di accumulazione per A e $L \in [-\infty, +\infty]$. Se $f(x)$ tende a L per $x \to x_0$ allora $f(x)$ non può tendere ad alcun altro elemento della retta estesa.* □

CENNO DI DIMOSTRAZIONE

Siano $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ che soddisfano la definizione di limite con $L_1 \neq L_2$



$I_1 \cap I_2 = \emptyset$

J_1 intorno di x_0 tale che .... $f(x) \in I_1$ | considero $J_1 \cap J_2$, prendo un $\bar{x} \in J_1 \cap J_2$

J_2 intorno di x_0 tale che .... $f(x) \in I_2$ | $\Rightarrow$ Allora $f(\bar{x}) \in I_1$ e $f(\bar{x}) \in I_2$ CONTRADDIZIONE

(*) Un intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$

Analogo per $-\infty$:

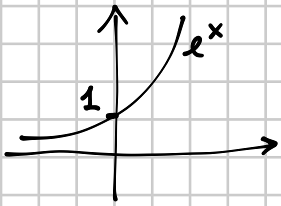
10 $\lim_{x \to -1} (x^4 - x^3 - 4)$ $[-2]$

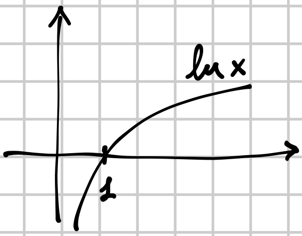
11 $\lim_{x \to +\infty} (e^x + \ln x)$ $[+\infty]$

10) $\lim_{x \to -1} (x^4 - x^3 - 4) = (-1)^4 - (-1)^3 - 4 = 1 - (-1) - 4 =$

$= 1 + 1 - 4 = -2$

11) $\lim_{x \to +\infty} (e^x + \ln x) = \lim_{x \to +\infty} e^x + \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty + \infty = +\infty$



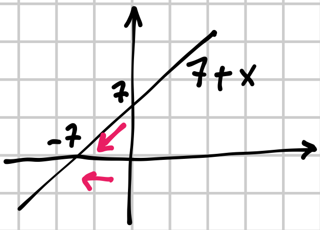


32 $\lim_{x \to -7^+} \dfrac{\sqrt{2-x} + x}{7+x}$

33 $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(2 + \sin x)}{\sin x}$

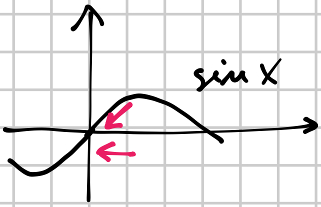
34 $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2 + 2x}$

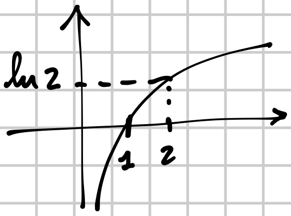
32) $\lim_{x \to -7^+} \dfrac{\sqrt{2-x} + x}{7+x} = \dfrac{\sqrt{2-(-7)} - 7}{7-7} = \dfrac{3-7}{0^+} =$



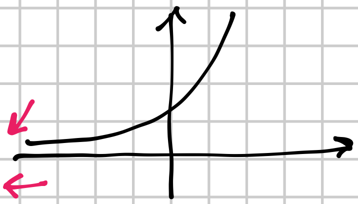
$= \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

33) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(2+\sin x)}{\sin x} = \frac{\ln(2+0)}{0^+} = \frac{\overbrace{\ln 2}^{>0}}{0^+} = +\infty$





34) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+2x} = \frac{e^{-\infty}}{(+\infty)^2+2(+\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+$



37 $\lim_{x \to 0^+} (x+3)^{\frac{1}{x}}$

DOMINIO $\begin{cases} x+3>0 \Rightarrow x>-3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$D = (-3,0) \cup (0,+\infty)$

<u>TRUCCO</u>

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

$$(x+3)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln (x+3)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x+3)}$$

1° PASSO: calcolo $\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \ln(x+3)\right] = \frac{1}{0^+} \cdot \ln(0+3) = +\infty \cdot \ln(3) =$
$= +\infty$

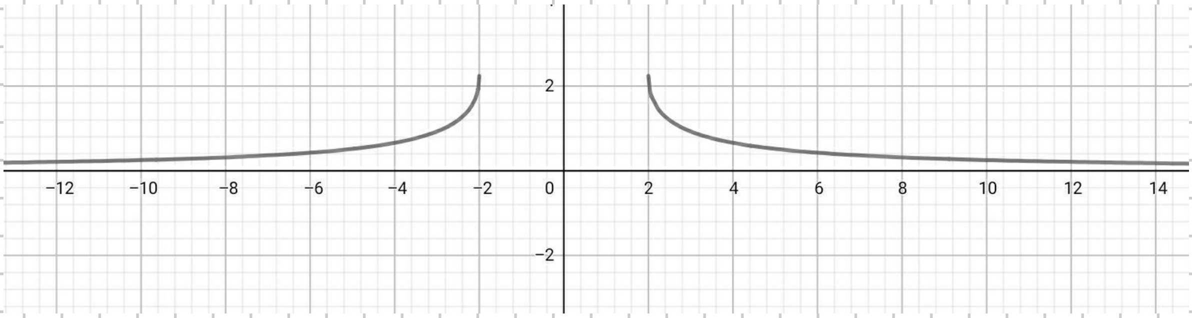
2° PASSO: $\lim_{x \to 0^+} (x+3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(x+3)} = e^{+\infty} = +\infty$

153 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right) = +\infty-\infty \quad$ F.I.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+4}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$=\frac{5}{+\infty}=0^+$$



288 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2-8}}{6x+7} = \frac{+\infty+\infty}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad$ F.I.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{8}{x^2}\right)}}{x\left(6+\frac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+|x|\sqrt{1-\frac{8}{x^2}}}{x\left(6+\frac{7}{x}\right)} =$$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-x\sqrt{1-\frac{8}{x^2}}}{x\left(6+\frac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-1-\sqrt{1-\underbrace{\frac{8}{x^2}}_{0}}\right)}{\cancel{x}\left(6+\underbrace{\frac{7}{x}}_{0}\right)} = \frac{-1-1}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$