17/10/2019

131 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{1+e^x}$ [0]

$-1 \leq \cos x\ 1$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{\cos x}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e^x}$

$1+e^x>0\ \forall x$, quindi moltiplicando per $\frac{1}{1+e^x}$ tutti i membri non si invertono le disuguaglianze

$-\frac{1}{1+e^x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, $\frac{1}{1+e^x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

quindi $\frac{\cos x}{1+e^x} \to 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{1+e^x} = 0}$$

136 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{\ln x}$ [0]

$-1 \leq \cos x \leq 1$ $\downarrow$ aggiungo 2

$2-1 \leq 2+\cos x \leq 2+1$

$1 \leq 2+\cos x \leq 3$ $\downarrow$ divido per $\ln x$ (positivo perché $x\to+\infty$)

$\frac{1}{\ln x} \leq \frac{2+\cos x}{\ln x} \leq \frac{3}{\ln x}$

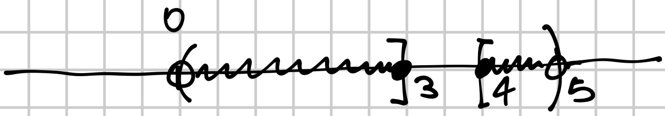
$\frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$, $\frac{3}{\ln x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

quindi $\frac{2+\cos x}{\ln x} \to 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{\ln x} = 0}$$

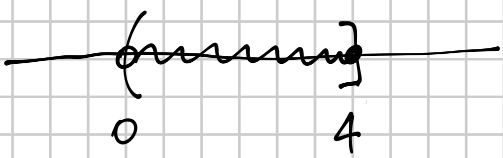
ESEMPI (COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$)

1) $A = (0,3] \cup [4,5)$



$-2, 0$ minoranti di A $\qquad$ $5, 6$ maggioranti di A

2) $B = (0,4]$



$-1, 0$ minoranti di B $\qquad$ $4, 5$ maggioranti di B

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\notin B$ $\qquad$ $\in B$ $\qquad$ $\max B = 4$ MASSIMO DI B

$\min B$ NON ESISTE

3) $C = [0,4]$ $\qquad$ $\min C = 0$ $\qquad$ $\max C = 4$

4) $D = (-3, +\infty)$ $\qquad$ D non ha maggioranti

-3 è un minorante $\notin D$

NON ESISTE $\min D$ $\qquad$ $\max D$ non esiste

5) $E = [-3, +\infty)$ $\qquad$ E non ha maggioranti

-3 è un minorante

$\min E = -3$ $\qquad$ $\max E$ non esiste

6) $F = (-\infty, -2) \cup [5, +\infty)$ non ha né maggioranti né minoranti

$\Downarrow$

non è né superiormente né inferiormente limitato

Prendiamo un insieme SUPERIORMENTE LIMITATO (e non vuoto) ad es. $[-5, 2) = G$

$\sup G = \min \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è maggiorante di } G\} = 2$

$\downarrow$

ESTREMO SUPERIORE DI G

$\inf G = \max \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è minorante di } G\} = -5$

$\downarrow$

ESTREMO INFERIORE DI G

$\min G = \inf G = -5$

$\sup G = 2$ $\max G$ non esiste

ESERCIZI FUNZIONI ESPONENZIALI

263 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}} = 0^0$ $\left[e^{\frac{2}{3}}\right]$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\underbrace{\frac{1}{3\ln x}\cdot \ln\left(\frac{x^2}{4}\right)}_{\frac{2}{3}}} = (*)$$

A PARTE $\frac{1}{3\ln x}\cdot\ln\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{3\ln x}\left[\ln x^2 - \ln 4\right] = \frac{1}{3\ln x}\left[2\ln x - \ln 4\right] =$

$$= \frac{2}{3} - \frac{\ln 4}{3\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{2}{3} - \underbrace{\frac{\ln 4}{-\infty}}_{0} = \frac{2}{3}$$

L'esponente tende a $\frac{2}{3}$ per $x \to 0^+$

$$(*) = \boxed{e^{\frac{2}{3}}}$$

PAG. 1457

267 $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e]$

269 $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{1+\ln x}}$ $[e]$

COMPITO

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(Si può anche scrivere

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \;)$$

In generale si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L \iff \lim_{x \to -\infty} f(x) = L \;\text{ e }\; \lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$$

LIMITI NOTEVOLI DA RICORDARE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

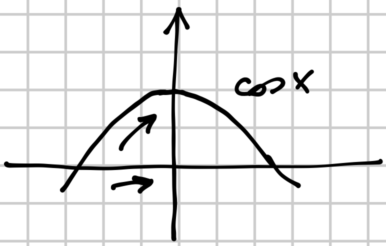
382

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\sin x}{1-\cos x}} = e^{\frac{0}{0}} \quad \text{F.I.}$$

A PARTE: $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{1-\cos x}}_{\to -\infty} = 1\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\boxed{\frac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^- \quad \text{quindi} \quad \frac{x}{1-\cos x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty}$$

$1-\cos x$ è sempre >0 in un intorno di 0 (escluso 0)



$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{\sin x}{1-\cos x}} = e^{-\infty} = 0^+$$