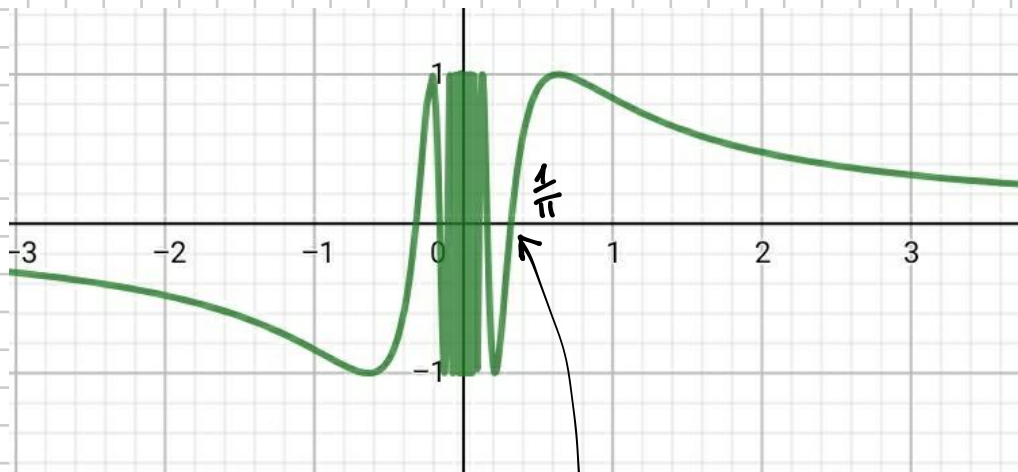


29/10/2019

$$\sin \frac{1}{x}$$



$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

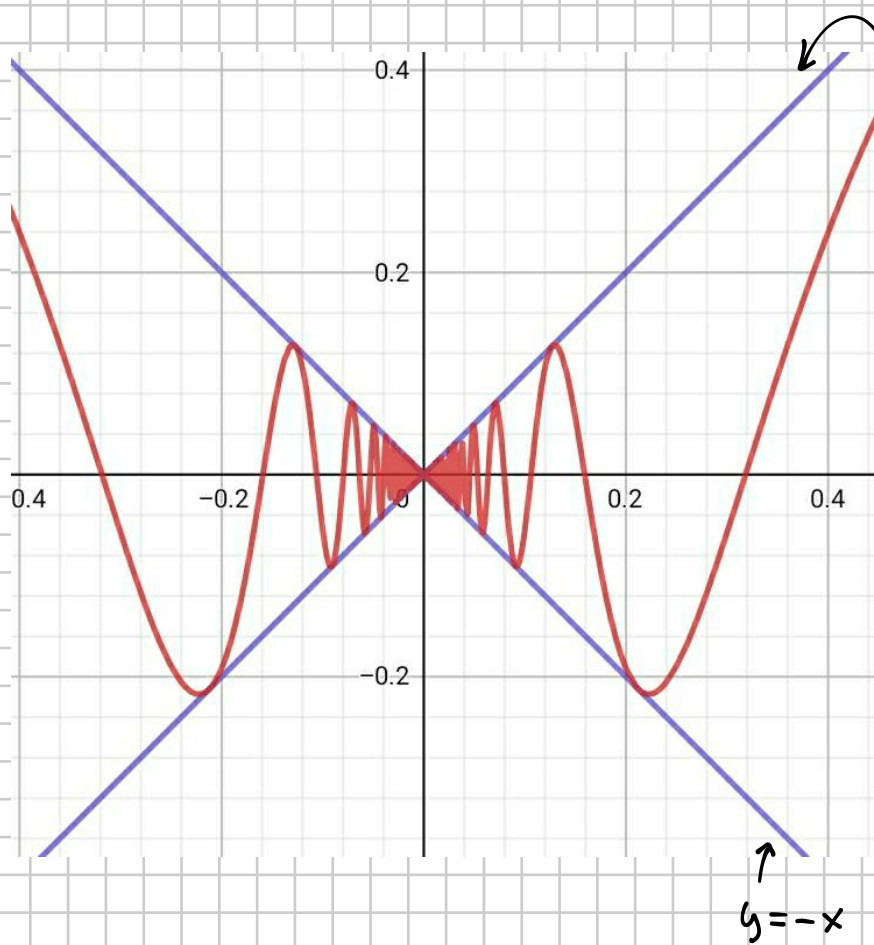
$$\frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$



$$x \sin \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$x > 0$$

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad \qquad \qquad 0$$

per il th. dei carabinieri
 esiste il limite di $x \sin \frac{1}{x}$
 per $x \rightarrow 0^+$ e vale 0
 Stesso ragionamento per $x < 0$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0}$$

459

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 4x} - 1}{\ln(1 + \tan x)} = 4$$

 $x \rightarrow 0$

$$\frac{e^{\sin 4x} - 1}{\ln(1 + \tan x)} \sim \frac{\sin 4x}{\tan x} \sim \frac{4x}{x} = 4$$

460

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin 2x + \sin x} = \frac{1}{3}$$

 $x \rightarrow 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{\sin 2x + \sin x} = \frac{\ln(x+1)}{2 \sin x \cos x + \sin x} = \frac{\ln(x+1)}{\sin x (2 \cos x + 1)} \sim$$

$$\sim \frac{x}{x(2 \cos x + 1)} = \frac{1}{2 \cos x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

COL LIMITI NOTEVOLI

$$\frac{\ln(x+1)}{\sin x (2 \cos x + 1)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Diagram illustrating the limit calculation with annotations:

- The numerator $\ln(x+1)$ is circled in red, with a red arrow pointing to the value 1.
- The denominator $\sin x (2 \cos x + 1)$ is circled in red, with a red arrow pointing to the value 3.
- The x terms in the denominator are circled in red, with red arrows pointing to the value 1.
- The final result $\frac{1}{3}$ is shown to the right of the fraction.

458

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^{\sin x} - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \sin x + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \right)} = \boxed{1}$$

The final step shows the limit evaluation with red annotations:

- A red arrow points from the $\tan x$ in the numerator to the value 1.
- Red circles highlight the three terms in the denominator: $\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}$, $\frac{\sin x}{x}$, and $\frac{1 - \cos x}{x}$.
- Red arrows point from these terms to their respective limits: 1, 1, and 0.
- The entire denominator expression is enclosed in a red circle, with an arrow pointing to the final result $\boxed{1}$.

455

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \ln(1+x) - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x - 1}{2x} - \frac{\ln(1+x)}{2x} \right] = -\frac{1}{2}$$

Handwritten annotations: A pink arrow points from the denominator $2x$ of the first fraction to a pink circle containing the number 0. Another pink arrow points from the denominator $2x$ of the second fraction to a pink circle containing the number 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DEFINIZIONE

$$x_0 \in [-\infty, +\infty]$$

- f è un INFINITESIMO per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- f è un INFINITO per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (con o senza segno)

CONFRONTO DI INFINITESIMI

Siano f e g due infinitesimi per $x \rightarrow x_0$.

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ ($L \in \mathbb{R}$) f e g sono INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE (tendono a 0 con la stessa rapidità)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g (f tende a 0 più velocemente di g)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ f è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g (g è DI ORDINE SUPERIORE a f , dunque g tende a 0 più velocemente di f)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f e g sono infinitesimi non confrontabili

CONFRONTO DI INFINITI

Siano f e g due infinite per $x \rightarrow x_0$.

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ ($L \in \mathbb{R}$) f e g sono INFINITI DELLO STESSO ORDINE (tendono a ∞ con la stessa rapidità)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ f è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A g (f tende a ∞ più velocemente di g)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE A g (g è DI ORDINE SUPERIORE a f , dunque g tende a ∞ più velocemente di f)
- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f e g sono infiniti non confrontabili

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, x_0 \in \mathbb{R}$

f infinitesimo

f ha ORDINE DI INFINITESIMO α per $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^\alpha} = L \neq 0 \quad (L \in \mathbb{R})$$

f ha ORDINE DI INFINITESIMO α per $x \rightarrow \pm\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = L \neq 0 \quad (L \in \mathbb{R})$$

f infinite

f ha ORDINE DI INFINITO α per $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}} = L \neq 0 \quad (L \in \mathbb{R})$$

f ha ORDINE DI INFINITO α per $x \rightarrow \pm\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = L \neq 0 \quad (L \in \mathbb{R})$$

- L'ORDINE DI INFINITESIMO O DI INFINITO NON CAMBIA SE LA FUNZIONE VIENE MOLTIPLICATA PER UNA COSTANTE (ANCHE PICCOLISSIMA O GRANDISSIMA)
- NON TUTTE LE FUNZIONI HANNO UN ORDINE DI INFINITESIMO O INFINITO!

GERARCHIA DEGLI INFINITI

- Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che nell'elenco che segue ogni funzione è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE per $x \rightarrow +\infty$ rispetto a quelle che la precedono

$$(\ln x)^\alpha \quad x^\beta \quad e^{\varepsilon x}$$

ALTRE GERARCHIE CHE POSSONO ESSERE UTILI NEL CALCOLO DEI LIMITI

- L'esponenziale $e^{\varepsilon x}$ è per $x \rightarrow -\infty$ un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE rispetto a ogni potenza di $\frac{1}{x}$
- Il logaritmo $|\ln x|^\alpha$ è per $x \rightarrow 0^+$ un INFINITO DI ORDINE INFERIORE rispetto a ogni potenza di $\frac{1}{x}$