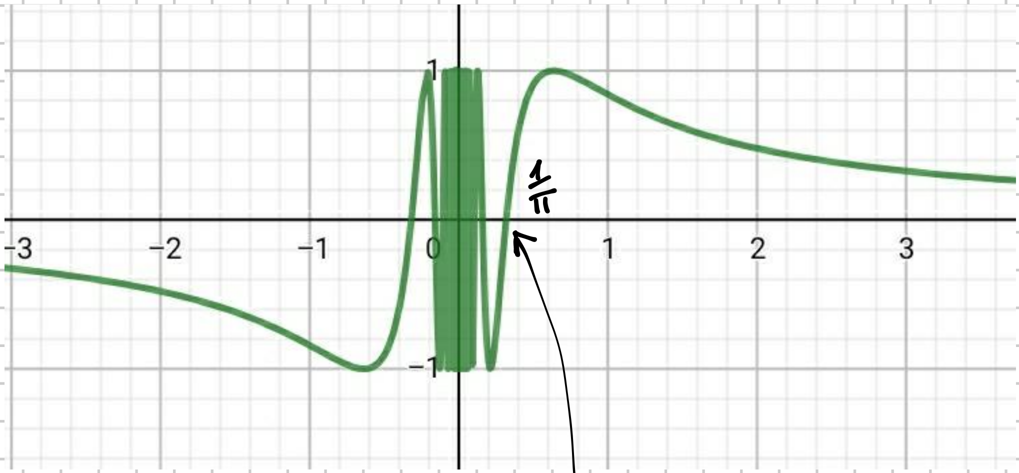
29/10/2019

$\sin \frac{1}{x}$



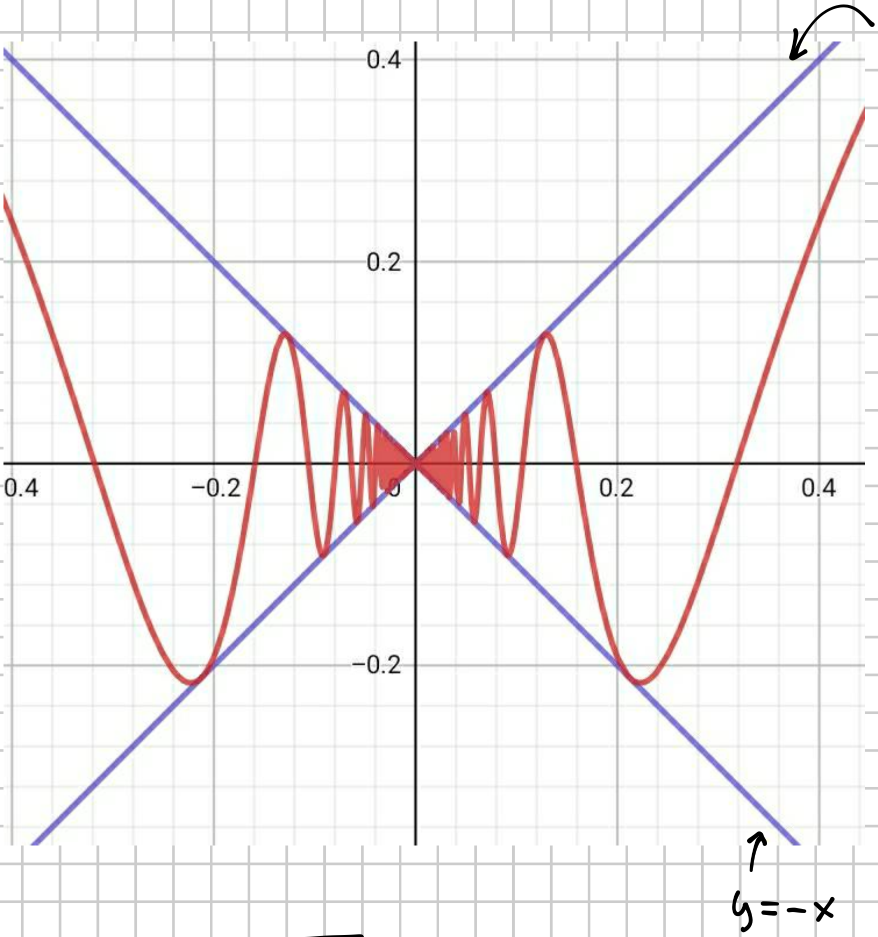
$\sin \frac{1}{x} = 0 \qquad \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$

$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ NON ESISTE

$\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ NON ESISTE

$\lim_{x \to 0^-} \sin \frac{1}{x}$ NON ESISTE



$x \sin \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

$x > 0$

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

per il th. dei carabinieri esiste il limite di $x \sin \frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ e vale 0

Stesso ragionamento per $x < 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0}$$

459 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 4x}-1}{\ln(1+\tan x)}=4$

$x\to 0$

$$\frac{e^{\sin 4x}-1}{\ln(1+\tan x)}\sim\frac{\sin 4x}{\tan x}\sim\frac{4x}{x}=4$$

460 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sin 2x+\sin x}=\frac{1}{3}$

$x\to 0$

$$\frac{\ln(x+1)}{\sin 2x+\sin x}=\frac{\ln(x+1)}{2\sin x\cos x+\sin x}=\frac{\ln(x+1)}{\sin x(2\cos x+1)}\sim$$

$$\sim\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(2\cos x+1)}=\frac{1}{2\underbrace{\cos x}_{1}+1}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{1}{3}$$

COI LIMITI NOTEVOLI

$$\frac{\ln(x+1)}{\sin x\,\underbrace{(2\cos x+1)}_{3}}\cdot\frac{x}{x}\to\frac{1}{3}$$

1

1

458 $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{e^{\sin x} - \cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{e^{\sin x} - 1 + 1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot \sin x + \frac{1-\cos x}{x}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot \frac{\sin x}{x}\cdot x + \frac{1-\cos x}{x}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\tan x}^{\to 1}}{x\left(\underbrace{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to 0}\right)} = \boxed{1}$$

455 ●●

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \ln(1+x) - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\underbrace{\frac{\cos x - 1}{2x}}_{0} - \frac{\overset{1}{\ln(1+x)}}{2x} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

DEFINIZIONE

$x_0 \in [-\infty, +\infty]$

- f è un INFINITESIMO per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- f è un INFINITO per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (con o senza segno)

CONFRONTO DI INFINITESIMI

Siano f e g due infinitesimi per $x \to x_0$

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ $(L \in \mathbb{R})$ f e g sono INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE (tendono a 0 con la stessa rapidità)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A g (f tende a 0 più velocemente di g)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ f è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE A g (g è DI ORDINE SUPERIORE a f, dunque g tende a 0 più velocemente di f)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f e g sono infinitesimi non confrontabili

CONFRONTO DI INFINITI

Siano f e g due infinite per $x \to x_0$

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ $(L \in \mathbb{R})$ f e g sono INFINITI DELLO STESSO ORDINE (tendono a ∞ con la stessa rapidità)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ f è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A g (f tende a ∞ più velocemente di g)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ f è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE A g (g è DI ORDINE SUPERIORE a f, dunque g tende a ∞ più velocemente di f)

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f e g sono infiniti non confrontabili

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

f infinitesimo

f ha ORDINE DI INFINITESIMO α per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x-x_0|^\alpha} = L \neq 0 \qquad (L \in \mathbb{R})$$

f ha ORDINE DI INFINITESIMO α per $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = L \neq 0 \qquad (L \in \mathbb{R})$$

f infinito

f ha ORDINE DI INFINITO α per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}} = L \neq 0 \qquad (L \in \mathbb{R})$$

f ha ORDINE DI INFINITO α per $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = L \neq 0 \qquad (L \in \mathbb{R})$$

- L'ORDINE DI INFINITESIMO O DI INFINITO NON CAMBIA SE LA FUNZIONE VIENE MOLTIPLICATA PER UNA COSTANTE (ANCHE PICCOLISSIMA O GRANDISSIMA)
- NON TUTTE LE FUNZIONI HANNO UN ORDINE DI INFINITESIMO O INFINITO!

GERARCHIA DEGLI INFINITI

- Per ogni $\alpha > 0$, per ogni $\beta > 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che nell'elenco che segue ogni funzione è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE per $x \to +\infty$ rispetto a quelle che la precedono

$$(\ln x)^{\alpha} \qquad x^{\beta} \qquad e^{\varepsilon x}$$

ALTRE GERARCHIE CHE POSSONO ESSERE UTILI NEL CALCOLO DEI LIMITI

- L'esponenziale $e^{\varepsilon x}$ è per $x \to -\infty$ un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE rispetto a ogni potenza di $\frac{1}{x}$

- Il logaritmo $|\ln x|^{\alpha}$ è per $x \to 0^{+}$ un INFINITO DI ORDINE INFERIORE rispetto a ogni potenza di $\frac{1}{x}$