5/11/2019

541 $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{4}{x^2}} = 1^{\infty}$ F.I.

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{-\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{-\frac{4}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{4}{x^2}\ln(\cos x)} = \boxed{e^2}$$

A PARTE

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{4\ln(\cos x)}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{4\ln(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right] =$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

non metto $\pm$ perché in un intorno di 0 $\cos x$ è positivo (tende a 1)

$$= \lim_{x\to 0}\left[-\frac{\frac{4}{2}\ln(1-\sin^2 x)}{x^2 \cdot \frac{-\sin^2 x}{-\sin^2 x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\overbrace{\frac{\ln(1+(-\sin^2 x))}{(-\sin^2 x)}}^{1}}{\underbrace{\frac{x^2}{\sin^2 x}}_{1}} = 2$$

532 ●●

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{2x} = 1^{\infty}$$

1° MODO (SOLITO)

$$\lim_{x\to\infty} e^{2x\ln\left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)} = \boxed{e^{-2}}$$

A PARTE

$$\lim_{x\to\infty} 2x\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty} 2x\left[\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x\left[\ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \lim_{x\to\infty} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} + \lim_{x\to\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\ \underbrace{\ln\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}_{\to e}\Big]}_{\to 1} + \lim_{x\to\infty} 2\ \underbrace{\ln\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{\to e}\Big]^{-1}}_{\to -1} = -2$$

532 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{2x}$

2° MODO

$$\left[\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}+1\right)}\right]^{2x} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{2x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}} = \frac{\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{2}{x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{e^2}$$

$e^0 = 1$

e 0

e

380 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \dfrac{0}{0}$

è ancora x perché x è positivo $(x\to 0^+)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

CONTINUITÁ IN UN PUNTO

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ di accumulazione per A

Diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diciamo che f è discontinua in x_0 in caso contrario (cioè se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ oppure non esiste)

CONTINUITÁ

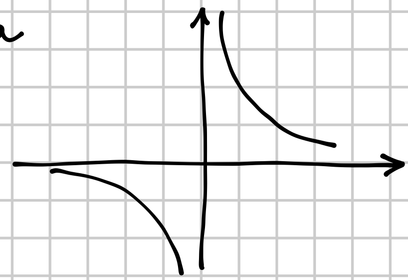
Diciamo che una funzione è continua se è continua in tutti i punti del suo dominio.

IMPORTANTE

Se una funzione non è definita in x_0, in tale punto essa non è né continua né discontinua! Semplicemente non ci poniamo il problema della continuità o discontinuità in x_0, contrariamente a quello che afferma il libro!!

Tutte le funzioni elementari sono CONTINUE

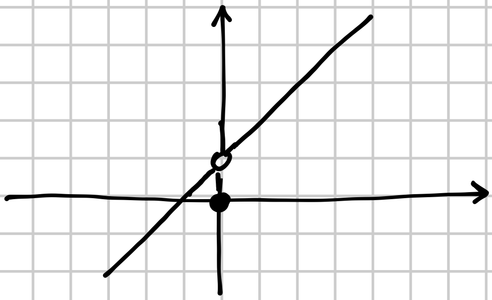
1) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ è continua



2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

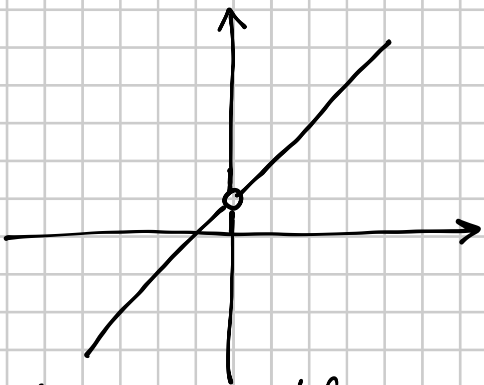
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è discontinua in 0



3) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x+1$



è continua,

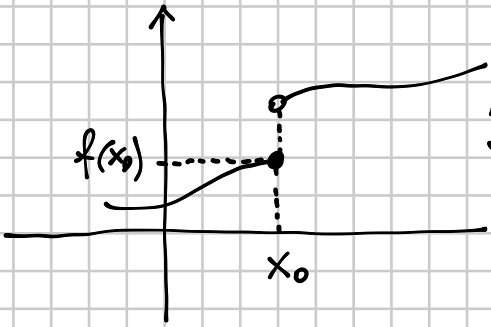
perché lo è in tutti i punti del suo dominio

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$

DISCONTINUITÀ DI 1° SPECIE (DI TIPO SALTO)

$x_0 \in A$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

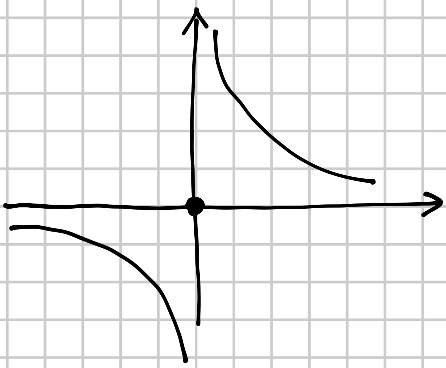


VALORE DEL SALTO $\underbrace{f(x_0^+)}_{\text{LIMITE DESTRO}} - \underbrace{f(x_0^-)}_{\text{LIMITE SINISTRO}}$

La f è discontinua in x_0 con una discontinuità di tipo salto (o di 1° specie). Si può dire che è continua a sinistra

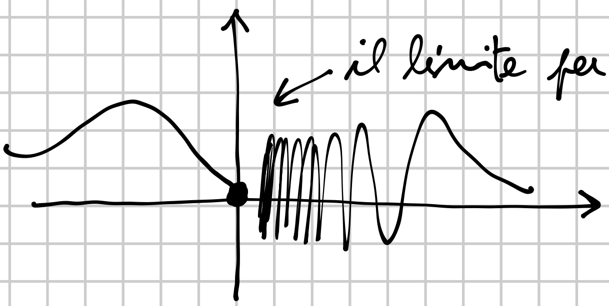
DISCONTINUITÀ DI 2° SPECIE

$x_0 \in A$ Almeno uno dei due limiti destro o sinistro è infinito oppure non esiste



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è discontinua in 0 con una discontinuità di 2° specie (in particolare 0 si chiama PUNTO DI INFINITO)

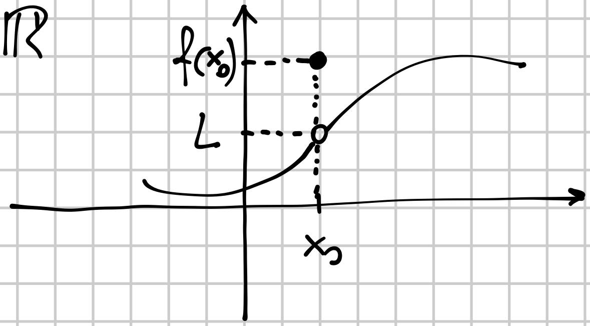


il limite per $x \to 0^+$ non esiste, si ha ancora una discontinuità di 2° specie

DISCONTINUITÀ DI 3° SPECIE (ELIMINABILE)

$x_0 \in A$ esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ finito e diverso da $f(x_0)$

$f: A \to \mathbb{R}$

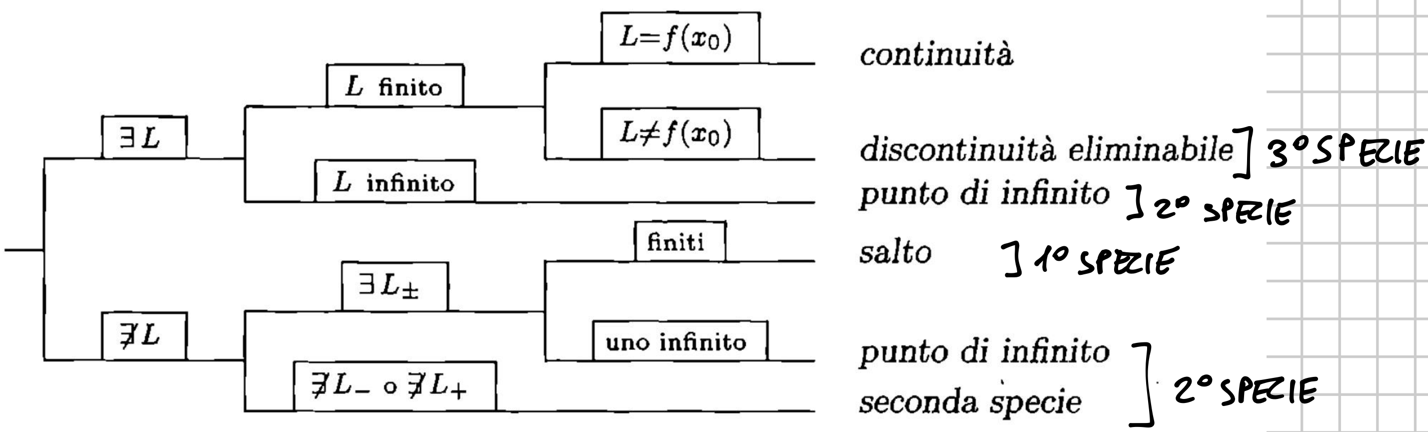


Si chiama "eliminabile" perché se definisco un'altra funzione così:

$g: A \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ L & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

g è CONTINUA



Determinare a, b in modo che f sia continua in $\mathbb{R}$

729 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & \text{se } x \le -3 \\ ax + b & \text{se } -3 < x \le 2 \\ x^3 + a & \text{se } x > 2 \end{cases}$

[$a = 2, b = 6$]

$f(-3) = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) = 0 \leftarrow$ DEVO IMPORRE

IMPONGO

$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} (ax + b) = -3a + b = 0$

$f(2) = 2a + b = \lim_{x \to 2^+} (x^3 + a) = 8 + a$

IMPONGO

$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ 2a + b = 8 + a \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3a \\ 2a + 3a = 8 + a \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3a \\ 4a = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 6 \\ a = 2 \end{cases}$