7/11/2019

Determinare a e b in modo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua

730 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2b & \text{se } x < -1 \\ 2x - b & \text{se } -1 \le x < 3 \\ \sqrt{2x + a} & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$ $[a = 3, b = 3]$

Per essere continua deve essere

$$\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} (-1)^2 - 2b = 2(-1) - b \\ 2 \cdot 3 - b = \sqrt{2 \cdot 3 + a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2b = -2 - b \\ 6 - b = \sqrt{6 + a} \end{cases} \qquad \begin{cases} -b = -3 \\ \text{———} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3 \\ 3 = \sqrt{6 + a} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3 \\ 9 = 6 + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ a = 3 \end{cases}$$

731 $f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ e^{x-1} - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $[a = -1]$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \qquad a - 1 = e^0 - 3$$

$$a = 1 - 3 + 1 = -1$$

531 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ F.I. $\left[\frac{1}{e}\right]$

Ricordare che $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

CAMBIO VARIABILE $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{y}}{1+\frac{2}{y}} \right)^y = \lim_{y \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}{\left(1+\frac{2}{y}\right)^y} =$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}{\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{2}\cdot 2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{\overbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}^{\to e}}{\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{y}{2}}}_{\to e}\Big]^2} = \frac{e}{e^2} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

In generale $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ → per vederlo basta fare il cambio di variabile $t = \frac{x}{k}$ $k \neq 0$

$k \in \mathbb{R}$ costante

(se $k = 0$ è $1^x = 1$)

Calcolare l'ordine di infinito

661 $f(x) = -x^4 - 1,$ per $x \to \infty$. [4]

per $x \to \infty$

$$-x^4 - 1 \sim -x^4$$

l'ordine di infinito è $\alpha = 4$

perché, confrontando con l'infinito "campione" per $x \to \infty$ $|x|^4$ si ha che

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^4 - 1}{|x|^4} = -1 \neq 0$$

660 $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, per $x \to 3$. [2]

Verificare che $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-3|^\alpha}} = L \neq 0$

è vero solo per $\alpha = 2$

Determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x) = \frac{x^2}{\sin 2x}$ per $x \to 0$

per $x \to 0$ $\frac{x^2}{\sin 2x} \sim \frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} = \frac{x}{2}$ ordine di infinitesimo $\alpha = 1$

640 $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x+\sin 2x + 1 - \cos 4x}{-2x^4+\sin^2 x}$

$$\frac{2x}{-2x^4+\sin^2 x} + \frac{\sin 2x}{-2x^4+\sin^2 x} + \frac{1-\cos 4x}{-2x^4+\sin^2 x}$$

Per mettere a posto il denominatore devo trovare una $g(x)$ tale che $-2x^4+\sin^2 x \sim g(x)$ per $x \to 0$

$$\underbrace{x^2\Big(-2x^2+\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\to 1}\Big)}_{\to 1} \sim x^2 \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\frac{2x}{-2x^4+\sin^2 x} \sim \frac{2x}{x^2} = \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to\infty} \qquad \frac{\sin 2x}{-2x^4+\sin^2 x} \sim \frac{2x}{x^2} = \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to\infty}$$

$$\frac{1-\cos 4x}{-2x^4+\sin^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 16 = 8$$

l'importante è che gli infiniti abbiano lo stesso segno

Quindi il limite richiesto è ∞