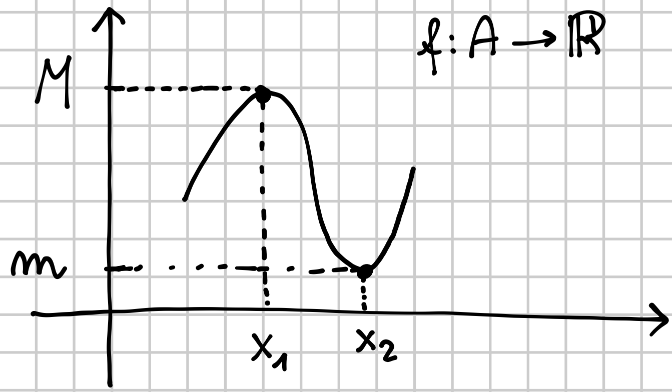
TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

5.4. Definizione. *Data una funzione reale f, si chiamano massimo e minimo di f, o valore massimo e valore minimo di f, il massimo e il minimo dell'insieme immagine di f. Essi, quando esistono, sono denotati rispettivamente con* $\max f$ *e* $\min f$, *cioè* $\max f = \max(\operatorname{im} f)$ *e* $\min f = \min(\operatorname{im} f)$.

Un punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *si chiama punto di massimo o punto di minimo, oppure punto di massimo assoluto o punto di minimo assoluto, quando rispettivamente*

$$f(x_0) = \max f \qquad o \qquad f(x_0) = \min f. \ \square$$



$f : A \to \mathbb{R}$

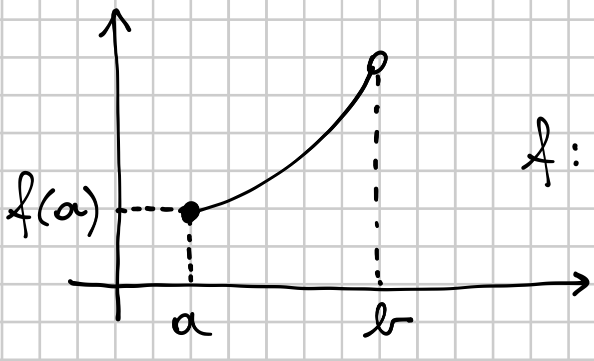
x_1 = PUNTO DI MASSIMO

$f(x_1) = M$ = MASSIMO DI f

x_2 = PUNTO DI MINIMO

$f(x_2) = m$ = MINIMO DI f

ESEMPIO



$f : [a, b) \to \mathbb{R}$

a = PUNTO DI MINIMO

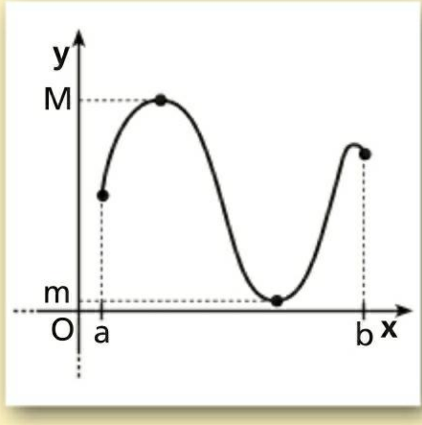
$f(a)$ = MINIMO DI f

IL MASSIMO E IL PUNTO DI MASSIMO <u>NON ESISTONO</u>!

TEOREMA

Teorema di Weierstrass

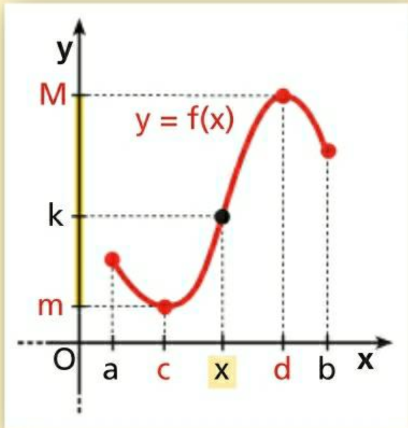
Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



TEOREMA

Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.



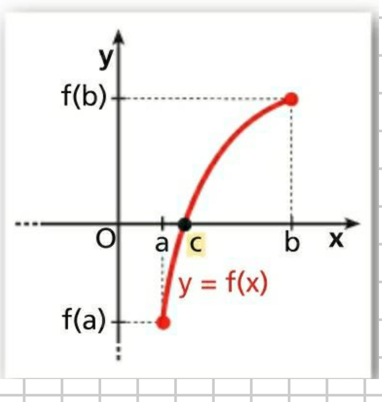
EQUIVALENTEMENTE: $f([a,b])$ è un intervallo

TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

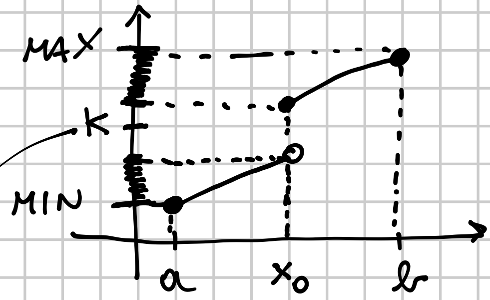
Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla, ossia $f(c) = 0$.

Ciò che afferma il teorema equivale a dire che, nelle ipotesi indicate, l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in $]a; b[$.



Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ non è continua, il teorema dei valori intermedi non vale

CONTROESEMPIO



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$

f ha in x_0 una discontinuità di tipo SALTO (1° SPECIE)

non esiste alcun x tale che $f(x)=K$

Stabilire se è applicabile il th. di Weierstrass

756 $y = x^2 - 4x$, $[0,3]$

$f:[0,3] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 4x$ è continua in $[0,3]$ quindi il teorema è applicabile

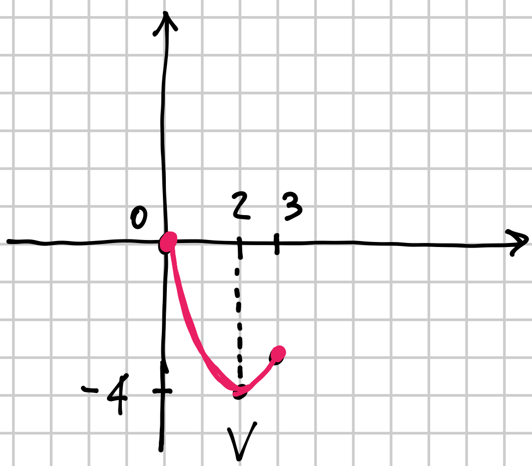
$\Downarrow$

in $[0,3]$ la funzione ha MAX e MIN

Disegniamo la parabola $y=x^2-4x$

$V(2,-4)$

x	y
0	0
3	-3



PUNTO DI MINIMO $x=2$ ‖ MIN $=-4$

PUNTO DI MASSIMO $x=0$ ‖ MAX $=0$

760 $y = \begin{cases} -2^x + 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$, $[0; 4]$.

STABILIRE SE È APPLICABILE IL TH. DI WEIERSTRASS

$f: [0,4] \to \mathbb{R}$

dobbiamo controllare se è continua in $[0,4]$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

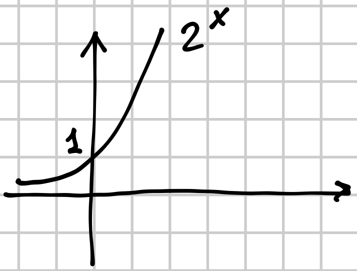
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(-2^x + 1\right) = -2+1 = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1$$

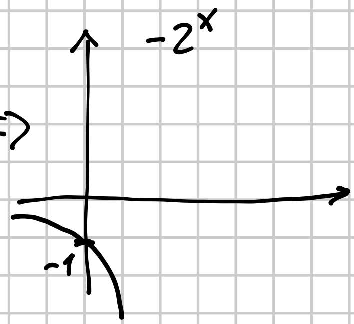
sono $\neq$ quindi in 1 c'è una discontinuità di tipo salto

$\Downarrow$

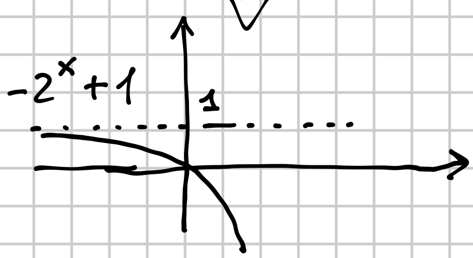
TH. DI WEIERSTRASS NON APPLICABILE

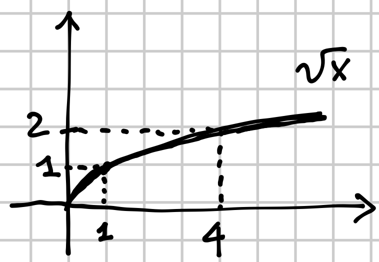


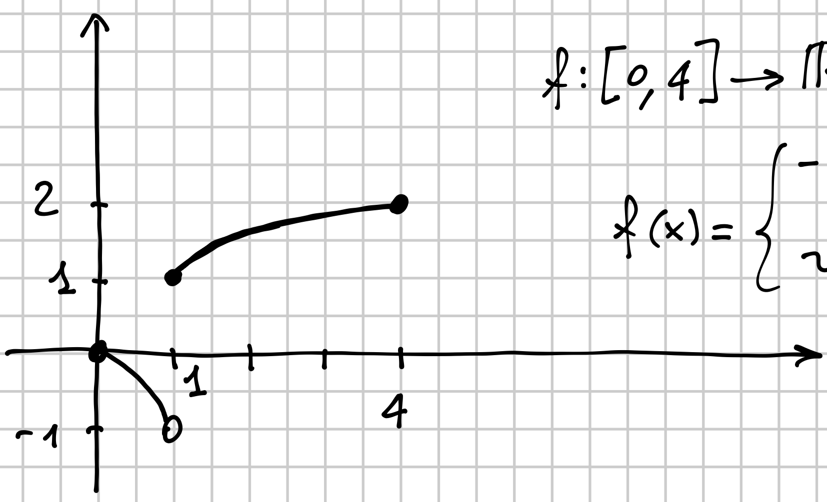
$\Rightarrow$



$\Downarrow$







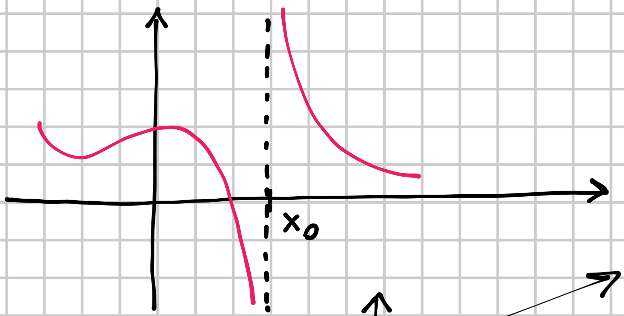
$f: [0,4] \to \mathbb{R}$

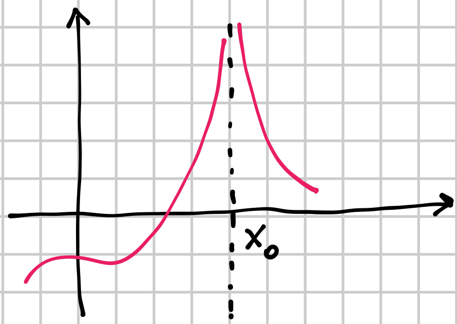
$$f(x) = \begin{cases} -2^x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

ASINTOTI

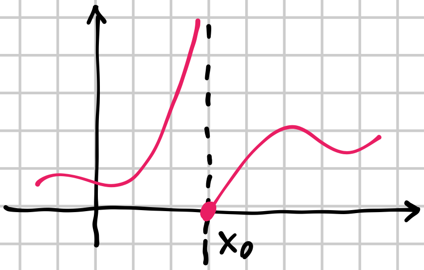
$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad x_0$ di accumulazione per A

Se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ allora $x = x_0$ è <u>ASINTOTO VERTICALE</u>



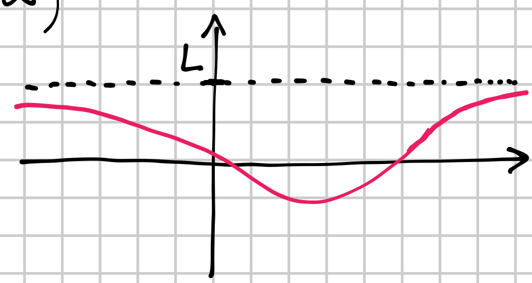


$\boxed{x = x_0}$ è ASINTOTO VERTICALE



Se il dominio è illimitato e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$,

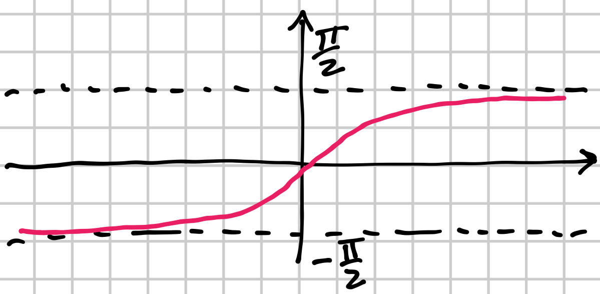
allora $y = L$ è ASINTOTO ORIZZONTALE (per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$, per $x \to \infty$)



$y = L$ è AS. ORIZZ. per $x \to \infty$

$y = L_1$ è AS. ORIZZ. per $x \to -\infty$

$y = L_2$ è AS. ORIZZ. per $x \to +\infty$

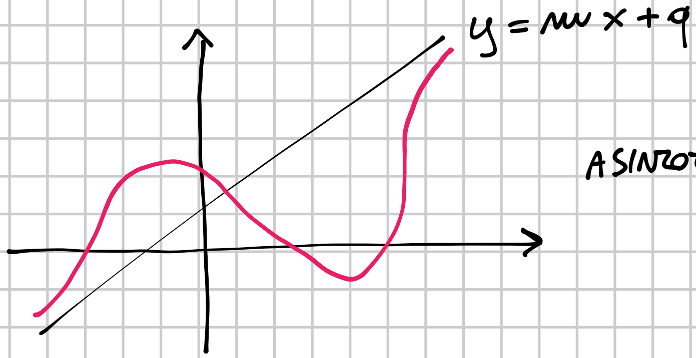


$y = \arctan x$

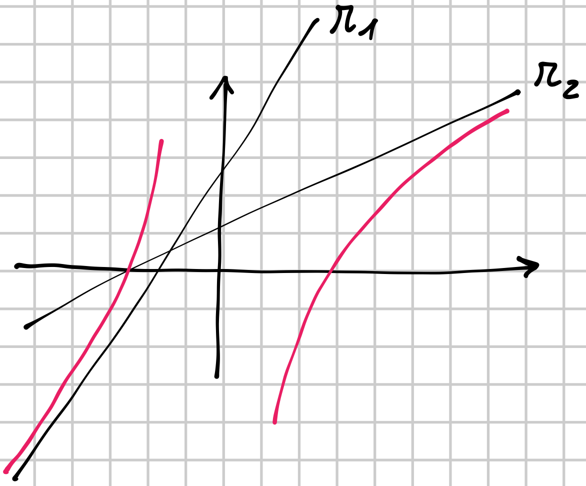
$y = \frac{\pi}{2}$ è as. orizz. per $x \to +\infty$

$y = -\frac{\pi}{2}$ è as. orizz. per $x \to -\infty$

ASINTOTI OBLIQUI



ASINTOTO OBLIQUO per $x \to \infty$

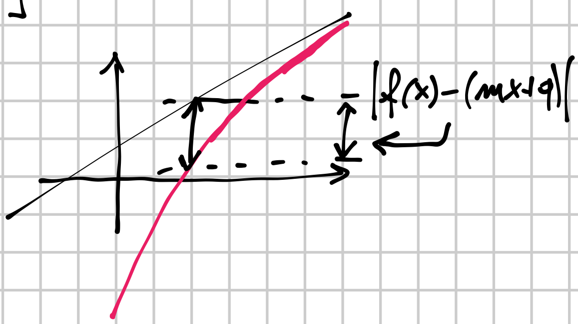


r_1 è AS. OBLIQUO per $x \to -\infty$

r_2 è AS. OBLIQUO per $x \to +\infty$

La retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO (per $x \to \infty$) di f

se e solo se $\quad \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (mx + q) \right] = 0$



METODO PER LA RICERCA DEGLI ASINTOTI OBLIQUI

La retta $y = mx + q$ è ASINTOTO OBLIQUO (per $x \to \infty$) di f

se e solo se

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]$$