21/11/2019

**45** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\quad c = 5.$

calcolare la derivata in c

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$$

$$f(5+h) = \frac{1}{\sqrt{5+h-1}} = \frac{1}{\sqrt{4+h}}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{4+h}} - \frac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2-\sqrt{4+h}}{2\sqrt{4+h}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2-\sqrt{4+h}}{2h\sqrt{4+h}} \cdot \frac{2+\sqrt{4+h}}{2+\sqrt{4+h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4-(4+h)}{2h\sqrt{4+h}\,(2+\sqrt{4+h})} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4}-\cancel{4}-h}{2h\sqrt{4+h}\,(2+\sqrt{4+h})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{2\cancel{h}\underbrace{\sqrt{4+h}}_{\downarrow \, 2}\,(2+\underbrace{\sqrt{4+h}}_{\downarrow \, 2})} = \frac{-1}{16} = -\frac{1}{16}$$

**43** $f(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-2x+2}, \qquad c = -2.$

$f(-2) = 0$

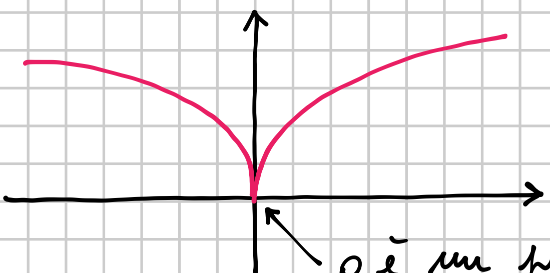
$f(-2+h)$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4-(-2+h)^2}{(-2+h)^2-2(-2+h)+2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2+4h}{h\left[(-2+h)^2-2(-2+h)+2\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-h+4)}{\cancel{h}\left[(-2+h)^2-2(-2+h)+2\right]} =$$

$$= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

"Calcolare" la derivata in 0 di $\sqrt{|x|}$



0 è un punto di non derivabilità che si chiama CUSPIDE perché

$f'_+(0) = +\infty$ e $f'_-(0) = -\infty$

DERIVATA DESTRA — DERIVATA SINISTRA

INFINITI DI SEGNO OPPOSTO

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \cdot \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h\sqrt{|h|}} = (*)$$

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h\sqrt{|h|}} = \begin{cases} ① \ h\to 0^+ \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = +\infty \\ ② \ h\to 0^- \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = -\infty \end{cases}$$

Il limite del rapporto incrementale non esiste, quindi la derivata in 0 non esiste.

Esistono però la derivata destra $f'_+(0) = +\infty$
e la derivata sinistra $f'_-(0) = -\infty$

essendo infiniti di segno opposto
$\Downarrow$
0 è una CUSPIDE

## TEOREMA

$f : I \to \mathbb{R}$ $\quad$ $I$ intervallo $\quad$ $x_0 \in I$ $\quad$ $f$ è derivabile in $x_0$
(esiste $f'(x_0)$ finito)

$\Rightarrow$ $f$ è CONTINUA in $x_0$

## DIMOSTRAZIONE

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow \; f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\downarrow \; 0}}_{\downarrow \; 0}$$

Calcolo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri

quindi

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 \implies \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

cioè $f$ è continua in $x_0$

CVD