22/11/2019

FUNZIONE DERIVATA

2.1. Definizione. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione e x_0 un punto di I. Se la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è finita, la funzione f è detta derivabile in x_0.* □

2.2. Definizione. *Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in almeno un punto di I. Si chiama derivata di f la funzione, denotata f', che a ogni punto $x \in I$ in cui f è derivabile associa la derivata di f in x. Dunque*

$$\operatorname{dom} f' = \{x \in \operatorname{dom} f : \ f'(x) \text{ esiste finita}\} \quad \text{e} \quad f' : x \mapsto f'(x). \ \square$$

ESEMPI

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x$

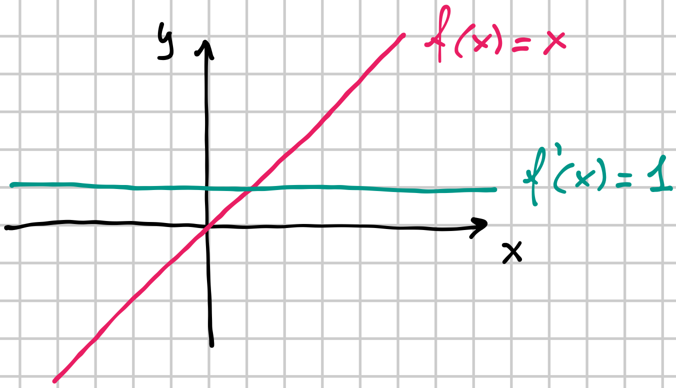
Considero un generico x e calcolo la derivata in x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1 \implies$$ La derivata di f in ogni punto x è 1

FUNZIONE DERIVATA

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1$



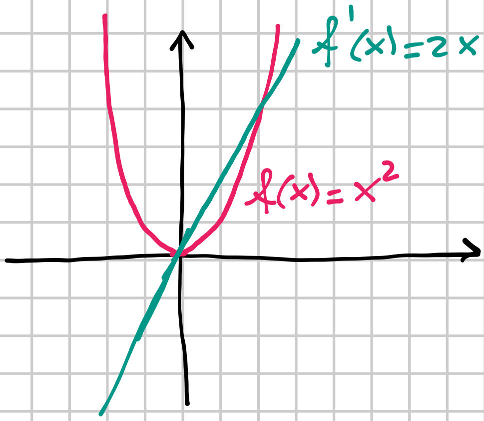
2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$$

FUNZIONE DERIVATA

$f':\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f'(x)=2x$



DALLE PROPRIETÀ DEI LIMITI SEGUE CHE

- $[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$
- $[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x)$

  $c\in\mathbb{R}$ costante

DERIVATA DI x^n $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq 1$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$$

$(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$

DIMOSTRAZIONE

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dots (*)$$

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n$$

BINOMIO DI NEWTON

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + n\,x^{n-1} h + \dots - \cancel{x^n}}{h} =$$

TERMINI MOLTIPLICATI PER POTENZE DI h CON ESPONENTE ≥ 2

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\,(n\,x^{n-1} + \dots)}{\cancel{h}} =$$

$$\underbrace{\text{TERMINI MOLTIPLICATI PER POTENZE DI } h}_{\downarrow \atop 0}$$ per $h \to 0$

$$= n\,x^{n-1}$$

Calcolare la derivata di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$

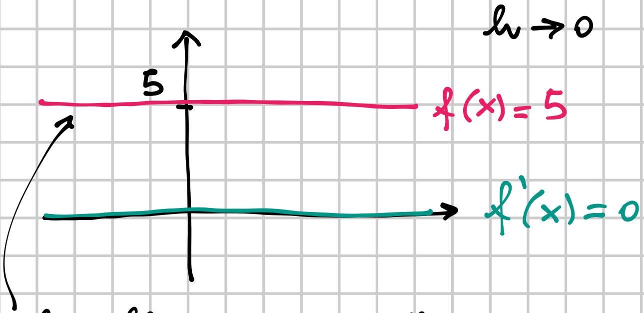
$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 2x + 1 = 12x^3 - 14x + 1$$

La derivata di una funzione costante è 0

$f(x) = 5 \qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5 - 5}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$



il coeff. angolare della tangente è sempre 0