26/11/2019

81 $f(x) = |2x| - 1, \qquad c = 0.$ Calcolare $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|2h| \cancel{-1} \cancel{+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2$$ ← perché $h>0$

perché $h<0$, quindi $|2h| = -2h$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|2h| \cancel{-1} \cancel{+1}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2$$

82 $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \le 3 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{se } x > 3 \end{cases}, \qquad c = 3.$ $f(3) = 3-3 = 0$

$$f'_+(3) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{3}(3+h) - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1} + \frac{h}{3} \cancel{-1}}{h} = \frac{1}{3}$$

$$f'_-(3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(\cancel{3} + h \cancel{-3}) - 0}{h} = 1$$

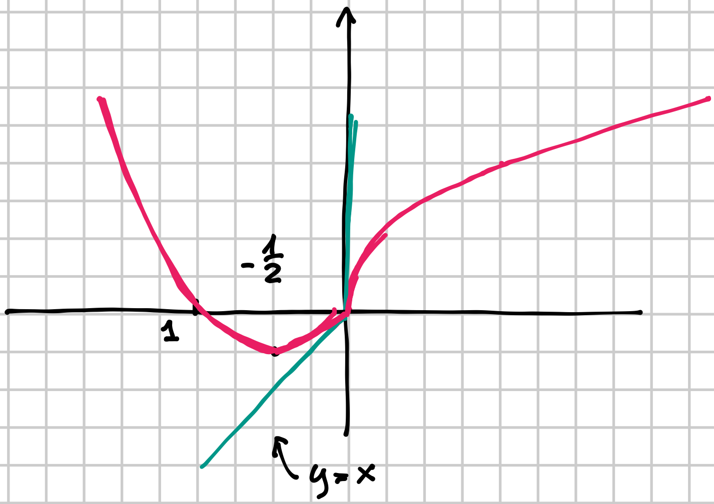
85 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, $c = 0$.

$f(0) = 0$

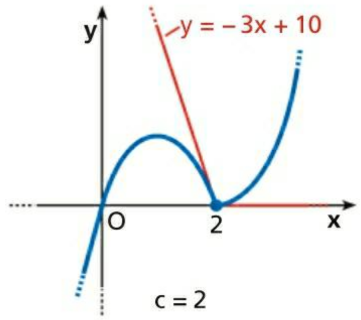
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

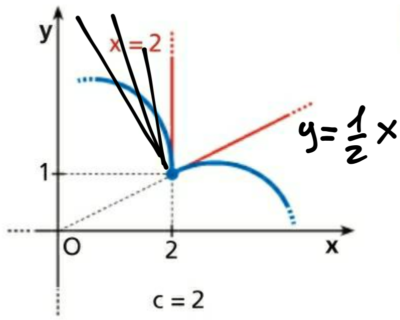
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}(h+1)}{\cancel{h}} = 1$$



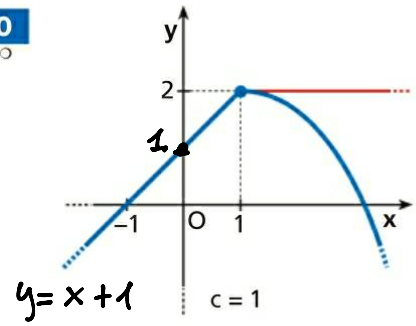
88



89



90



$f'_-(2) = -3$

$f'_+(2) = 0$

$f'_-(2) = -\infty$

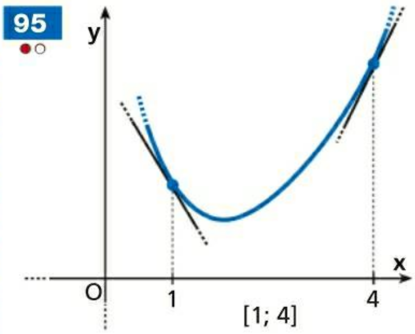
$f'_+(2) = \frac{1}{2}$

$f'_-(1) = 1$

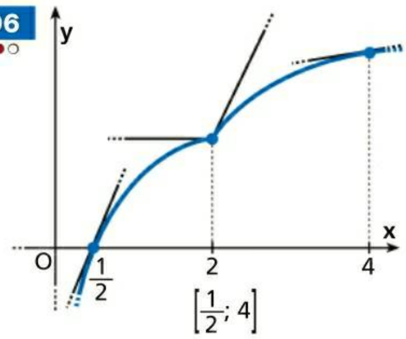
$f'_+(1) = 0$

LEGGI IL GRAFICO Esaminando i grafici e utilizzando il significato geometrico di derivata, deduci se le seguenti funzioni sono derivabili negli intervalli indicati.

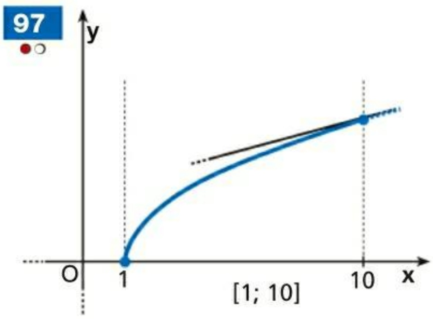
95



96



97



$\Downarrow$

è derivabile in tutti i punti di $[1,4]$, è derivabile in $[1,4]$

Non ci sono punti in $[1,4]$ in cui la derivata non esiste o è infinita

$\Downarrow$

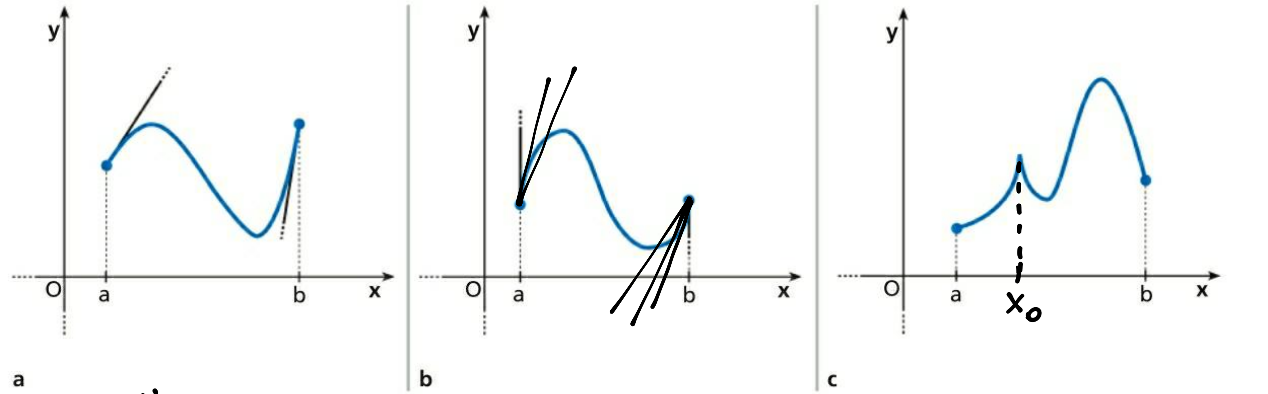
NON è derivabile in $[\frac{1}{2},4]$ perché nel punto 2 non esiste la derivata, essendo diverse la derivata destra e la derivata sinistra

$\Downarrow$

NON è derivabile in $[1,10]$ perché in 1 la derivata (che in questo caso coincide con la derivata destra) è $+\infty$.

Però è derivabile in $(1,10]$

98 **LEGGI IL GRAFICO** Indica se i seguenti grafici rappresentano funzioni: **a.** continue in $[a; b]$; **b.** derivabili in $[a; b]$. In caso negativo, giustifica le tue risposte.



a: ⇓ CONTINUA E DERIVABILI IN $[a, b]$

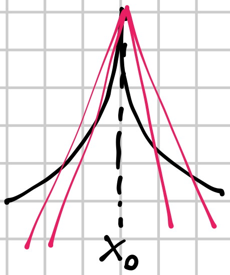
b: ⇓ CONTINUA, MA NON DERIVABILE IN $[a, b]$ PERCHÉ

$f'(a) = +\infty$ E

$f'(b) = +\infty$

c: ⇓ CONTINUA, MA NON DERIVABILE IN $[a, b]$

IN x_0 LE DERIVATE DESTRA E SINISTRA SONO DIVERSE



$f'_-(x_0) = +\infty$

$f'_+(x)_0 = -\infty$

RIEPILOGO DELLE REGOLE DI DERIVAZIONE VISTE FINORA

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[c\, f(x)]' = c \cdot f'(x)$

  c costante

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = c$ costante $\qquad f'(x) = 0$

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \qquad f'(x) = n\, x^{n-1}$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

Calcoliamo la derivata di $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\cos x \underbrace{\frac{(\cos h - 1)}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = -\sin x$$

$f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\sin x \underbrace{\frac{(\cos h - 1)}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = \cos x$$

ESERCIZIO = Calcolare la derivata di

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7\cos x - 5e^x$$

$$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 - 7\sin x - 5e^x$$

$$f'(0) = 15 \cdot 0^4 - 6 \cdot 0^2 - 7\sin 0 - 5e^0 = -5$$

Calcoliamo la derivata di $f(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (x > 0)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - x^\alpha}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x} \cdot x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \to \alpha$$

$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = ?$

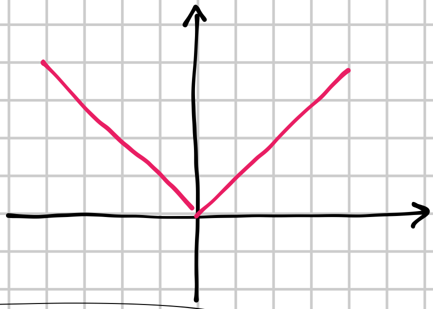
$\Downarrow$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(x > 0)$

La funzione $|x|$

è derivabile in tutti i punti tranne in 0

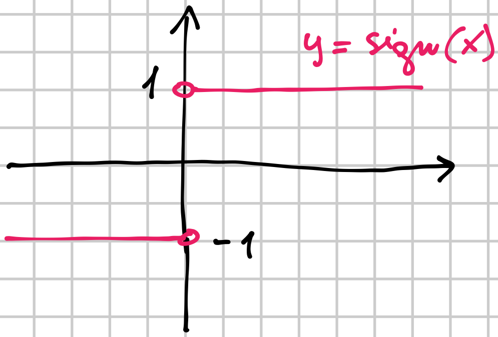


$$f(x) = |x| \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

NON È DEFINITA IN 0

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

si chiama FUNZIONE SEGNO



$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è la derivata di $|x|$

$$x = |x| \cdot \text{sign}(x) \quad \forall x \neq 0$$

151 $y = 3x\sqrt{x}$; $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$; $y = 4\sqrt{x}$.

calcolare le derivate

- $y = 3x\sqrt{x} = 3x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}}$

  $y' = 3 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}$

- $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x}} = 9x^{-\frac{1}{3}}$ $\quad y' = 9\left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1} = -3x^{-\frac{4}{3}} =$

  $= -3 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}$

- $y = 4\sqrt{x}$ $\quad y' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

184 $y = \frac{1 - x^3 - x^5}{x^5} =$ $\quad \left[y' = \frac{-5 + 2x^3}{x^6}\right]$

$= \frac{1}{x^5} - \frac{x^3}{x^5} - \frac{x^5}{x^5} = x^{-5} - x^{-2} - 1$

$y' = -5x^{-6} + 2x^{-3} = -\frac{5}{x^6} + \frac{2}{x^3} = \frac{-5 + 2x^3}{x^6}$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$y = f(g(x))$ $\qquad$ f, g DERIVABILI (IPOTESI BUONE)

$$[f(g(x))]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = (*)$$

$$t = g(x)$$

$$\Delta t = g(x+\Delta x) - g(x) = g(x+\Delta x) - t$$

$$\Rightarrow g(x+\Delta x) = t + \Delta t$$

$$(*) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} \right] =$$

$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta t \to 0$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = f'(t) \cdot g'(x) =$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

1) ESEMPIO = Calcolare la derivata di $y = \sin^2 x$

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \sin x$ $\quad f(g(x)) = (\sin x)^2$

$f'(x) = 2x$ $\quad g'(x) = \cos x$

$$y' = [f(g(x))]' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

2) ESEMPIO = Calcolare la derivata di $y = \sin x^2$

$f(x) = \sin x$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad f(g(x)) = \sin x^2$

$f'(x) = \cos x$ $\quad g'(x) = 2x$

$$y' = [f(g(x))]' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Provare a calcolare la derivata di $y = 2^x = e^{\ln 2^x} =$

$= e^{x \cdot \ln 2}$