29/11/2019

220 $y=(x\ln x+1)(x^2-1)+x\left(1-\frac{x^2}{3}\right)$

$$y'=(x\ln x+1)'(x^2-1)+(x\ln x+1)(x^2-1)'+$$

$$+1\cdot\left(1-\frac{x^2}{3}\right)+x\cdot\left(1-\frac{x^2}{3}\right)'=$$

$\frac{d}{dx}x$

$$=\left(1\cdot\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)(x^2-1)+(x\ln x+1)(2x)+1-\frac{x^2}{3}+x\left(-\frac{2}{3}x\right)=$$

$$=(\ln x+1)(x^2-1)+2x^2\ln x+2x+1-\frac{x^2}{3}-\frac{2}{3}x^2=$$

$$=x^2\ln x-\ln x+\cancel{x^2}-\cancel{1}+2x^2\ln x+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}=$$

$$=3x^2\ln x-\ln x+2x=(3x^2-1)\cdot\ln x+2x$$

Se si moltiplicano prima, veniva più semplice ....

$$y=x^3\ln x-x\ln x+x^2-1+x-\frac{x^3}{3}=$$

$$=\ln x\,(x^3-x)+x^2-1+x-\frac{x^3}{3}$$

$$y'=\frac{1}{x}(x^3-x)+\ln x\cdot(3x^2-1)+2x+1-x^2=\ldots.$$

221 $y = x\sin x - (2x-1)\cos x$

$$y' = 1\cdot \sin x + x\cdot \cos x - \left[2\cos x + (2x-1)(-\sin x)\right] =$$

$$= \cancel{\sin x} + x\cos x - 2\cos x + 2x\sin x - \cancel{\sin x} =$$

$$= (x-2)\cos x + 2x\sin x$$

223 $y = x \cdot e^x \cdot \ln x = (x\cdot e^x)\cdot \ln x$

$$y' = (xe^x)'\cdot \ln x + xe^x\cdot(\ln x)' =$$

$$= (e^x + xe^x)\ln x + \cancel{x}e^x\cdot\frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$= e^x\ln x + xe^x\ln x + e^x =$$

$$= e^x(\ln x + x\ln x + 1)$$

SE SI VUOLE RICORDARE ....

$$[f(x)\cdot g(x)\,h(x)]' = [(f(x)g(x))\,h(x)]' = [f(x)g(x)]'h(x) +$$

$$+ f(x)g(x)\cdot h'(x) = [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,h(x) + f(x)g(x)\,h'(x) =$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)\cdot g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

DERIVATA DEL QUOZIENTE DI FUNZIONI

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x)\,\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)\,g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

234 $y = \dfrac{x^2+5}{x^2-1}$

$$y' = \frac{(x^2+5)'(x^2-1) - (x^2+5)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2-1) - (x^2+5)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 10x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= -\frac{12x}{(x^2-1)^2}$$

LA DERIVATA DELLA TANGENTE

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

3.1. Teorema di linearità. *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno a I, $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_0 e c un numero reale. Allora sono derivabili in x_0 anche le funzioni $f + g$ e cf e valgono le formule:*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{3.1}$$

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0). \quad \square \tag{3.2}$$

3.2. Teorema. *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno a I e $f, g : I \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili in x_0. Allora è derivabile in x_0 anche la funzione fg. Se inoltre $g(x_0) \neq 0$ anche f/g è derivabile in x_0.*

Valgono infine le formule, la prima delle quali è detta di Leibniz:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{se} \quad g(x_0) \neq 0. \quad \square \tag{3.4}$$

3.3. Teorema. *Siano I e J due intervalli, x_0 un punto interno a I, $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in x_0 tale che $f(x_0)$ sia interno a J e $g : J \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in $f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è ben definita in un intorno di x_0 e differenziabile in x_0 e per la sua derivata in x_0 vale la formula*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad \square \tag{3.5}$$

DIFFERENZIABILE $\equiv$ DERIVABILE