10/12/2019

619 $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\qquad\left[y' = -\left(\frac{1}{x}\right)^x (\ln x + 1)\right]$

$$y = x^{-x} = e^{\ln x^{-x}} = e^{-x\ln x}$$

$$y' = e^{-x\ln x}\cdot(-x\ln x)' = -e^{-x\ln x}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{x}\right)^x (\ln x + 1)$$

625 $y = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $\qquad\left[y' = \frac{1}{\sin x}\right]$

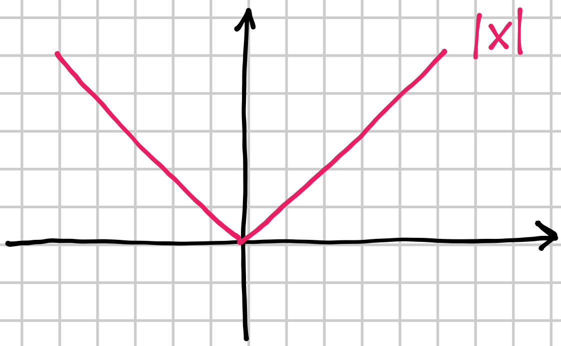
$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\frac{1-\cos x}{\cancel{1+\cos x}}}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\sin x + \cancel{\sin x\cos x} + \sin x - \cancel{\sin x\cos x}}{2(1-\cos^2 x)} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cancel{\sin x}}{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} x} = \frac{1}{\sin x}$$

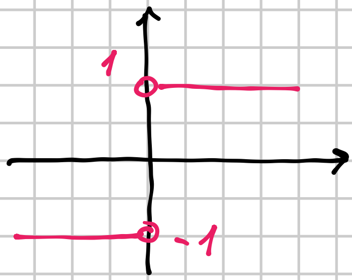


NON È DERIVABILE IN 0

La composizione di funzioni derivabili non dà problemi, in genere...

Se c'è di mezzo un modulo, vanno controllati i punti in cui il modulo si annulla, tramite il limite del rapporto incrementale

Ricordiamo che $f(x) = |x| \rightarrow f'(x) = \text{sign}\, x$



$$\text{sign}\, x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

in 0 non è definita

819 $y = |\ln(x-1)|$ [$x = 2$, punto angoloso] STUDIAMO LA DERIVABILITÀ

Il dominio è $(1, +\infty)$. I punti che possono dare problemi per la derivabilità sono quelli in cui il modulo si annulla, cioè

$$|\ln(x-1)| = 0 \Rightarrow \ln(x-1) = 0$$

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

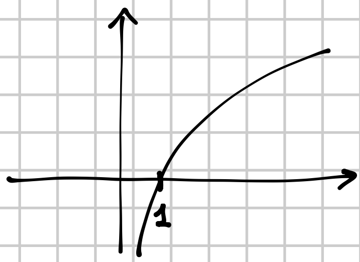
$f(x) = |\ln(x-1)|$

In $x = 2$ faccio il controllo diretto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{|\ln(2+h-1)|}^{f(2+h)} - \overbrace{|\ln(2-1)|}^{f(2)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|\ln(1+h)| - |\ln 1|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|\ln(1+h)|}{h} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{-\ln(1+h)}{h} = -1 \end{cases}$$



$f'_+(2) = 1$ DERIVATA DESTRA

$\neq$

$f'_-(2) = -1$ DERIVATA SINISTRA

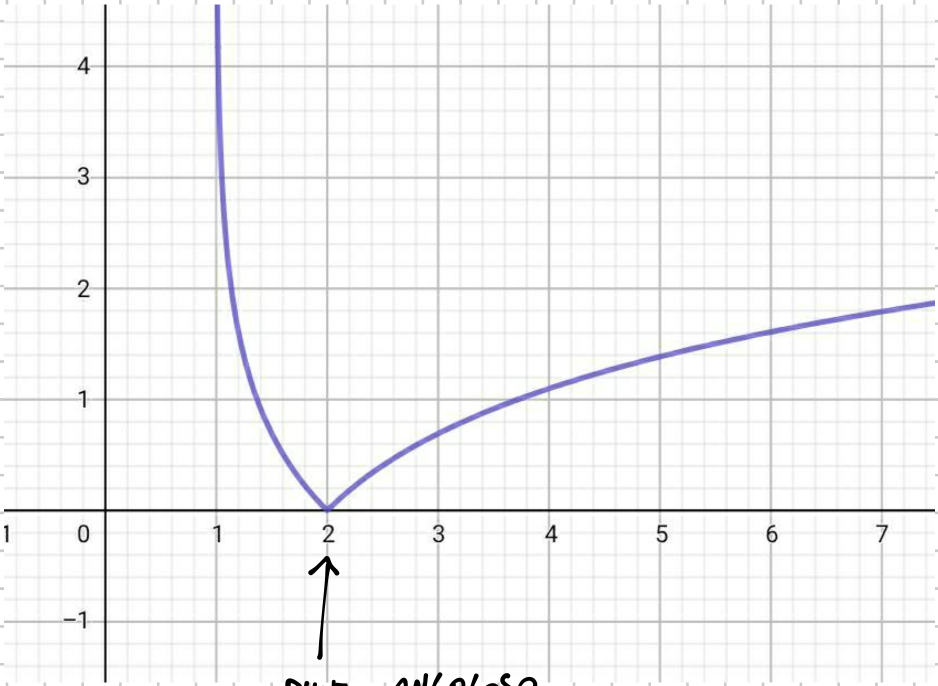
$\Downarrow$

$X = 2$ PUNTO ANGOLOSO

Negli altri punti di $(1, +\infty)$ diversi da 2 la derivata si calcola nel solito modo

$y = |\ln(x-1)|$ $\quad$ $y' = \text{sign}(\ln(x-1)) \cdot [\ln(x-1)]' =$

$$= \text{sign}(\ln(x-1)) \cdot \frac{1}{x-1}$$



$|\ln(x-1)|$

PUNTO ANGOLOSO

822 $y = -\sqrt{|x|}$ $[x = 0, \text{cuspide}]$

DOMINIO $\mathbb{R}$ Controllo in 0 la derivabilità

$f(x) = -\sqrt{|x|}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{|0+h|} - (-\sqrt{|0|})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt{|h|}}{h} \cdot \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-|h|}{h\sqrt{|h|}} =$$

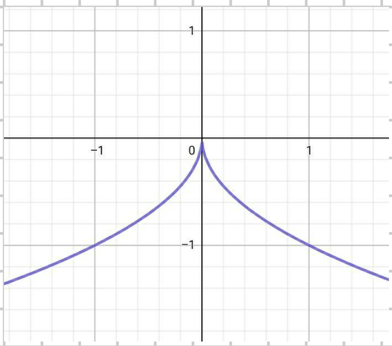
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = -\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{|h|}} = +\infty = f'_-(0)$$

$x = 0$ CUSPIDE

In tutti gli altri punti $\neq 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \text{sign}(x)$$



$-\sqrt{|x|}$

848 $y = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

Controlliamo che la funzione sia continua in $x=0$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x^2 = \lim_{x \to 0^+} 2x \ln x = \lim_{x \to 0^+} 2 \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$$

INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A $\ln x$

In modo analogo si controlla per $x \to 0^-$:

$$\lim_{x \to 0^-} x \ln x^2 = \lim_{x \to 0^-} 2x \ln|x| = \dots = 0$$

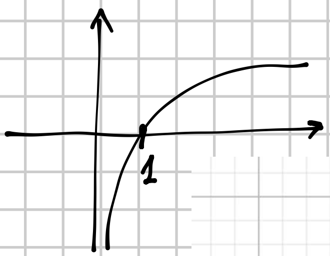
quindi la funzione è continua in 0

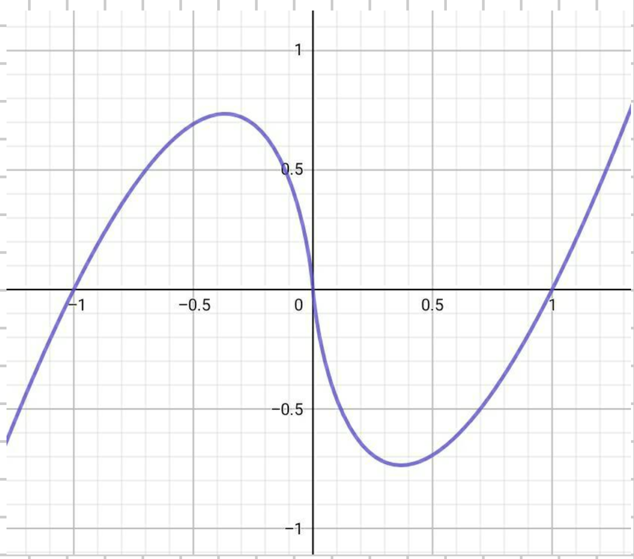
Se $x \neq 0$ $\quad y = x \ln x^2 \quad y' = \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x =$

$$= \ln x^2 + 2$$

Se $x = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{(0+h)\ln(0+h)^2}^{f(0+h)} - \overbrace{0}^{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \ln h^2}{\cancel{h}} = -\infty = f'(0)$$





f è continua, ma non derivabile in 0, dove c'è un FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

869 Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(x-2) & \text{se } x\le 2\\ a\ln(x-1)+b-2a & \text{se } x>2\end{cases},$$

trova a e b in modo che risulti continua e derivabile in $x=2$. Trova poi le equazioni delle tangenti nei punti di ascissa 2 e 3.

$\left[a=1, b=2;\ y=x-2,\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\ln 2\right]$

CONTINUITÀ IN 2

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left[a\ln(x-1)+b-2a\right] = \lim_{x\to 2^-}\arctan(x-2)$$

$$b-2a=0 \Rightarrow b=2a$$

DERIVABILITÀ IN 2

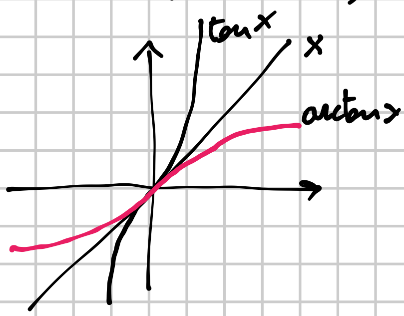
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-\overbrace{f(2)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-\overbrace{f(2)}^{0}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\ln(2+h-1)+b-2a}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\arctan(\cancel{2}+h-\cancel{2})}{h}$$

perché $b=2a$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\ln(1+h)+\cancel{b}-\cancel{2a}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\arctan h}{h}$$

($\arctan h \sim h$ per $h\to 0$)



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{a\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$a=1$$

$$\Rightarrow b=2$$

La funzione $f(x) = \begin{cases} \arctan(x-2) & x \leq 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}$

Trovare le tangenti in $x=2$ e $x=3$ (nei punti di ascisse $x=2$ e $x=3$)

ASCISSE

EQ. DELLA TANGENTE IN $(x_0, f(x_0))$ $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = 2$

$f(x_0) = f(2) = 0 \qquad A(2,0) \qquad y - 0 = 1 \cdot (x-2)$

$f'(2) = 1$

$$\boxed{y = x - 2}$$

$x_0 = 3 \qquad B(3, \ln 2)$

$f(x_0) = f(3) = \ln 2$

$f'(3) = ?$

$[\ln(x-1)]' = \dfrac{1}{x-1}$

$f'(3) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

$y - \ln 2 = \dfrac{1}{2}(x-3)$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \ln 2}$$