12/12/2019

71 Data la famiglia di funzioni $y = -x^3 + 6kx + 33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 a una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva,* 2015, *quesito* 2)

$y = -x^3 + 6Kx + 33$

RETTA // BIS. 1°-3° QUAD. $y = x + q$

coeff. angolare 1

$x = 3$

$y' = -3x^2 + 6K$

PONGO

$y'(3) = -3 \cdot 3^2 + 6K = -27 + 6K = 1$

$-27 + 6K = 1 \Rightarrow 6K = 28 \Rightarrow K = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

$y = -x^3 + \cancel{6}^{2} \cdot \frac{14}{\cancel{3}_1} x + 33 \Rightarrow \boxed{y = -x^3 + 28x + 33}$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = 3 \qquad y - f(3) = 1 \cdot (x - 3)$

$f(3) = -3^3 + 28 \cdot 3 + 33 = -27 + 84 + 33 = 90$

$y - 90 = x - 3$

$\boxed{y = x + 87}$

866 Calcola a e b in modo che la seguente funzione sia derivabile nel punto $x = 1$. Scrivi la derivata di $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax & \text{se } x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\left[a = -6, b = 1;\ f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{se } x \leq 1 \\ -\dfrac{3}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}\right]$$

La f deve essere continua in 1:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} (a\sqrt{x} + b) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 + ax)$$

$$\cancel{a} + b = 1 + \cancel{a} \implies b = 1$$

DERIVABILITÀ IN 1: $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\qquad (\Delta x = h)$

$f(1) = 1 + a$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{a\sqrt{1+h} + b - (1+a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a\sqrt{1+h} + \cancel{1} - \cancel{1} - a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{a\sqrt{1+h} - a}{h} = \lim_{h \to 0^+} a\left[\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}\right] = \frac{1}{2}a$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^3 + a(1+h) - (1+a)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{1} + 3h + 3h^2 + h^3 + \cancel{a} + ah - \cancel{1} - \cancel{a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{1} + 3h + 3h^2 + h^3 + \cancel{a} + ah - \cancel{1} - \cancel{a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}(3 + 3h + h^2 + a)}{\cancel{h}} = 3 + a$$

Per essere derivabile in 1 deve essere $f'_+(1) = f'_-(1)$

$$\frac{1}{2}a = 3 + a$$

$$-\frac{1}{2}a = 3$$

$$a = -6$$

$$\begin{cases} a = -6 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x & \text{se } x \leq 1 \\ -6\sqrt{x} + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6 & \text{se } x < 1 \\ -\frac{3}{\sqrt{x}} & \text{se } x > 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

SOSTITUISCO $a = -6$ in $f'_+(1) = \frac{1}{2}a$ oppure in $f'_-(1) = 3 + a$

854 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ x^2 - 5x + 4 & \text{se } x > 1 \end{cases}, \qquad x_0 = 1.$

$D = [-1, +\infty)$

Verificare che f è continua, ma non derivabile in 1

$$f(1) = \sqrt{1-1^2} = 0 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-5x+4) = 1-5+4 = 0 \quad \text{OK}$$

È CONTINUA IN 1

DERIVABILITÀ

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - \overbrace{f(1)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 5(1+h) + 4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{5} - 5h + \cancel{4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}(-3+h)}{\cancel{h}} = -3$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - \overbrace{f(1)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} - h^2 - 2h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{h^2\left(-1-\frac{2}{h}\right)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\sqrt{-1-\frac{2}{h}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}\sqrt{-1-\frac{2}{h}}}{\cancel{h}} = -\infty$$

$+\infty$

$x_0 = 1$ = PUNTO ANGOLOSO per f