14/12/2019

77 Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione $f(x) = \log_x 2$ nel punto P di ascissa $x = 2$.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione straordinaria*, 2013, *quesito* 4)

$$f(x) = \log_x 2 \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DOMINIO}}}{D} = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln 2}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{-\ln 2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f'(2) = -\frac{\cancel{\ln 2}}{2\ln^{\cancel{2}} 2} = -\frac{1}{2\ln 2}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

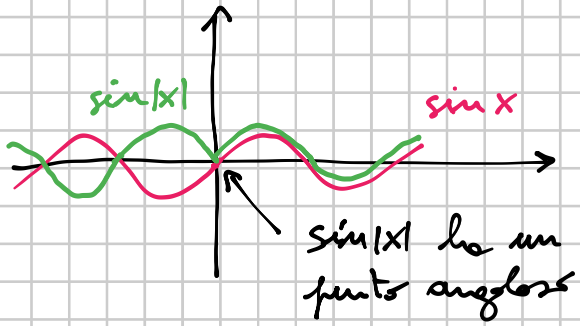
$$y - 1 = -\frac{1}{2\ln 2}(x-2)$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2\ln 2}x + \frac{1}{\ln 2} + 1}$$

76 Date le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = |x|$, dimostra utilizzando la definizione di derivata che $f \circ g$ non è derivabile in 0. Rappresenta graficamente la funzione e fornisci un'interpretazione geometrica di questo fatto.

$$f(x) = \sin x \qquad g(x) = |x|$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin|x|$$



Controllo diretto in 0

$$[f(g(0))]'_+ = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(g(0+h)) - f(g(0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$[f(g(0))]'_- = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(g(0+h)) - f(g(0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1$$

Siccome la derivata destra e la der. sinistra sono diverse, $\sin|x|$ non è derivabile in 0.

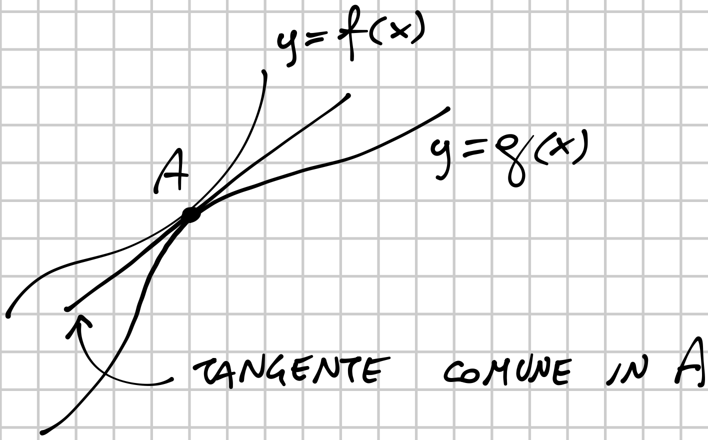
86 Si determinino le costanti a, b, c in modo che le curve di equazioni $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = x^3 + c$ siano tangenti nel punto $A(1; 0)$. Si determini l'equazione della tangente comune.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria, 2008, quesito

$f(x) = x^2 + ax + b$

$g(x) = x^3 + c$

$A(1,0)$



PASSAGGIO PER A (PER ENTRAMBE)

$$\begin{cases} f(1) = 1 + a + b = 0 \\ g(1) = 1 + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$f'(x) = 2x + a$ $\qquad$ $f'(1) = g'(1)$

$g'(x) = 3x^2$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$$2 + a = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

TANGENTE $\qquad y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y = 3(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 3x - 3}$$

85 Assegnata la funzione $y = e^{x^3-8}$:

a. verificare che è invertibile;

b. stabilire se la funzione inversa f^{-1} è derivabile in ogni punto del suo dominio di definizione, giustificando la risposta.

(*Simulazione ministeriale dell'esame di Stato*, 22 aprile 2015, *quesito* 1)

$y = e^{x^3-8}$ È INVERTIBILE PERCHÉ INIETTIVA

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1^3-8} = e^{x_2^3-8}$

$\Rightarrow x_1^3 - 8 = x_2^3 - 8 \Rightarrow x_1 = x_2$

CONDIZIONE DI DERIVABILITÀ DI f^{-1}

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}} \longleftarrow f'(f^{-1}(x)) \neq 0$$

$$y' = e^{x^3-8} \cdot (3x^2) = 3x^2 e^{x^3-8}$$

Si annulla solo per $x = 0$.

Ora, c'è un punto c tale che $f^{-1}(c) = 0$?

sì $\Downarrow$

$c = f(0)$

$c = e^{-8}$

Calcolo l'inversa:

$$y = e^{x^3-8} \rightsquigarrow x = e^{y^3-8}$$

$\ln x = y^3 - 8$

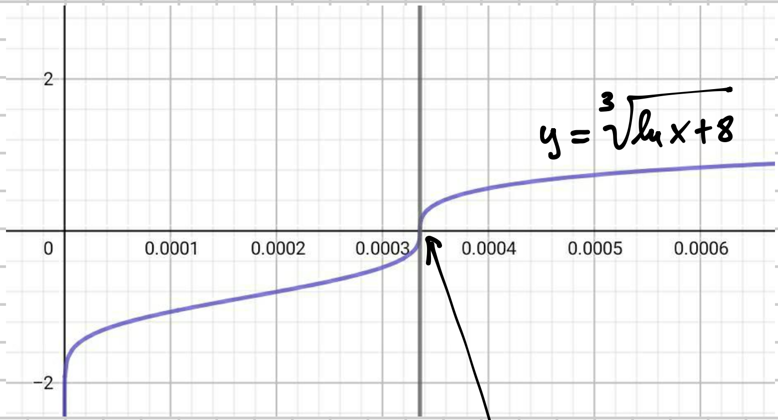
$y^3 = \ln x + 8$

$\boxed{y = \sqrt[3]{\ln x + 8}}$ FUNZIONE INVERSA

SI ANNULLA SE $\ln x + 8 = 0$

$\ln x = -8$

$x = e^{-8}$



è il punto c in cui f^{-1} si annulla, dunque in c f^{-1} NON è derivabile