7/1/2020

4.4. Teorema del limite della derivata. *Sia* $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ *una funzione continua in* a *e derivabile in* $]a,b[$. *Se* $\underbrace{f'(a+)}_{\lim_{x \to a^+} f'(x)}$ *esiste, finito o no, allora anche* $f'_+(a)$ *esiste e vale* $f'(a+)$. □

SE ESISTE IL LIMITE DELLA DERIVATA, ALLORA ANCHE $f'_+(a)$ ESISTE E VALE QUESTO LIMITE

ESEMPI

1) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = 3x^2 + 2x$

Controlliamo la derivata in $x=0$ con questo metodo

$$f'(x) = 6x + 2$$

IPOTESI

- f è continua in $[0,1]$
- f è derivabile in $(0,1]$
- $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ esiste

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2 = f'_+(0)$$

2)

867 Trova a e b in modo che la seguente funzione sia derivabile nel punto $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 2a\,e^x & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x+a}{b-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$\left[a = -1, b = \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ae^x & x < 0 \\ \dfrac{b+a}{(b-x)^2} & x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{b-\cancel{x}+\cancel{x}+a}{(b-x)^2}$$

PER LA DERIVABILITÀ IN $X=0$ DEVE ESSERE

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b+a}{(b-x)^2} = \lim_{x\to 0^-} 2ae^x$$

$$\frac{b+a}{b^2} = 2a$$

PER LA CONTINUITÀ IN $X=0$ DEVE ESSERE

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+a}{b-x} = \lim_{x\to 0^-} 2ae^x$$

$b \neq 0$

$$\frac{a}{b} = 2a$$

$$\begin{cases} b+a = 2ab^2 \\ \cancel{a} = 2\cancel{a}b \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}+a = \frac{a}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}}$$

$a \neq 0$

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ SOL. NON ACCETTABILE PERCHÉ SAREBBE $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$

3)
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

per il TH. CARABINIERI

f è continua perché $\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$

È derivabile in 0?

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+\cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

per $x\neq 0$

$\lim_{x\to 0} f'(x)$ NON ESISTE!

Quindi NON possiamo applicare il teorema del limite della derivata!

Facciamo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^2\sin\frac{1}{0+h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}\sin\frac{1}{h}}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}=0=f'(0)$$

TH. CARABINIERI

Quindi f è derivabile in $x=0$ con $f'(0)=0$