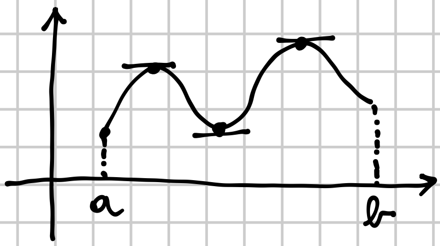
TEOREMA

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ I intervallo $x_0 \in I$ INTERNO

x_0 p.to di max o min relativo

f derivabile in x_0



$\Rightarrow \; f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE

Sia x_0 massimo.

$\forall h > 0$ tale che $x_0 + h \in I$, si ha $f(x_0+h) \leq f(x_0)$,

quindi
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$$

$\forall h < 0$ tale che $x_0 + h \in I$, si ha $f(x_0+h) \leq f(x_0)$,

quindi
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$$

Siccome f è derivabile in x_0, si ha

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$$

TEOREMI DEL VALOR MEDIO

IPOTESI SULLE FUNZIONI IN GIOCO

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f \text{ DERIVABILE IN } (a,b) \\ f \text{ CONTINUA IN } [a,b] \end{array}\right\} \; (1)$$

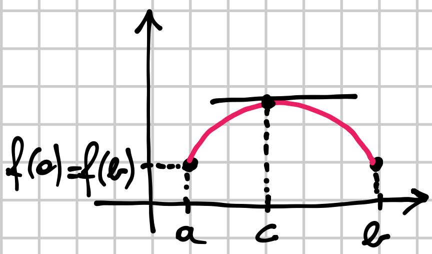
TEOREMA DI ROLLE

IPOTESI (1) per f

$f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \; : \quad f'(c)=0$

INTERNO

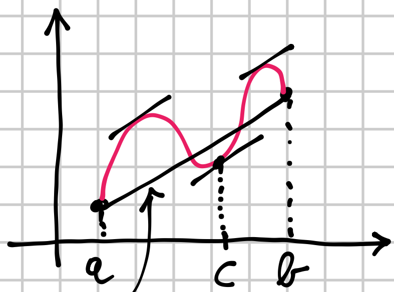


TEOREMA DI LAGRANGE

IPOTESI (1) per f $\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \; : \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

INTERNO

coeff. angolare è $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



TEOREMA DI CAUCHY

IPOTESI (1) per f

IPOTESI (1) per g, $g'(x)\neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

$\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) :$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIMOSTRAZIONI

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, Rightarrow, "\boxed{3}"'] & & L \arrow[ll, Rightarrow, "\boxed{2}"'] \\ & C \arrow[ur, Rightarrow, "\boxed{1}"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{1}$ Considero $g(x) = x$, prendo c dato dal TH. CAUCHY e trovo il TH. LAGRANGE

$\boxed{2}$ OVVIO

$\boxed{3}$ Considero $h(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)$

con $\alpha = g(b) - g(a)$ e $\beta = f(b) - f(a)$

Si ha $h(a) = h(b)$. Applico il TH. DI ROLLE e trovo il TH. DI CAUCHY

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA PIÚ SEMPLICE: IL TEOREMA DI ROLLE

1° CASO) f costante $\Rightarrow$ OVVIO

2° CASO) f non costante

TH. WEIERSTRASS $\Rightarrow$ f ha x_1 p.to di minimo e x_2 p.to di massimo in $[a,b]$

Almeno uno fra x_1 e x_2 è INTERNO, cioè x_1 e x_2 non possono essere entrambi a e b,

$$\cancel{\{x_1, x_2\} = \{a, b\}} \leftarrow \text{NON PUÓ ESSERE!!}$$

perché se così fosse, dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$, sarebbe $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $\min f = \max f$, e f sarebbe costante.

Perciò $c \in (a,b)$ punto di estremo relativo (max o min) e quindi $f'(c) = 0$ dal teorema precedente.

TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, I intervallo

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è COSTANTE

DIMOSTRAZIONE

Siano $x_1, x_2 \in I$. Applico TH. LAGRANGE all'int. $[x_1, x_2]$. Trovo $f(x_1) = f(x_2)$