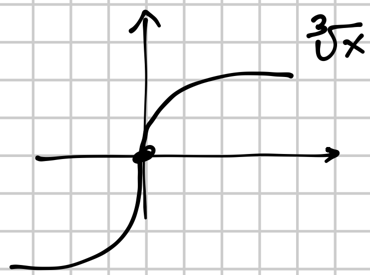
14/11/2020

Vedere se si può applicare TH. LAGRANGE

56 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x, \qquad [-1; 0]. \qquad \left[c = -\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

f è continua in $[-1, 0]$, perché somma di funzioni continue

f <u>NON</u> è derivabile in 0, ma lo è in $(-1, 0)$, quindi le ipotesi del teorema di Lagrange sono soddisfatte



$$\Rightarrow \exists\, c \in (-1, 0) : \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = f'(c)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} - 4 = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - 4 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 4$$

$f(0) = 0$

$f(-1) = \sqrt[3]{-1} + 4 = 3$

$$\frac{-3}{+1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} - 4$$

$$1 = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$$

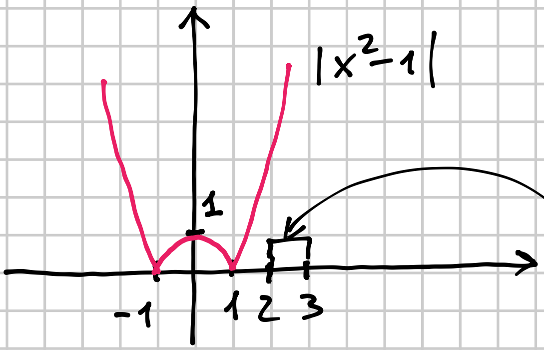
$$\sqrt[3]{c^2} = \frac{1}{3} \qquad c^2 = \frac{1}{27}$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

scelgo solo la soluzione che cade in $(-1, 0)$

57 $f(x) = |x^2 - 1|$, $[2; 3]$. $\left[c = \frac{5}{2}\right]$

SEMPRE TH. LAGRANGE



INTERVALLO DA PRENDERE IN CONSIDERAZIONE

In $[2,3]$ f è continua e derivabile (nei calcoli posso anche non considerare il modulo)

lo calcolo considerando il modulo!

$$f'(x) = \text{sign}(x^2-1) \cdot [2x] = 2x \cdot \text{sign}(x^2-1)$$

NELL'INTERVALLO $[2,3]$ coincide con $2x$

$f(3) = 8$

$f(2) = 3$

$$\frac{f(3) - f(2)}{3-2} = f'(c)$$

$$8 - 3 = 2c \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

59 $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x & \text{se } x<0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, $[-1;2]$. $\left[c=-\dfrac{1}{30}\right]$

SEMPRE
TH. LAGRANGE

Bisogna valutare in 0 sia continuità che derivabilità. Negli altri punti c'è sia continuità che derivabilità

CONTINUITÀ

$$\lim_{x\to 0^-}(-2x^2+x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2+1}=0 \qquad \text{OK!}$$

DERIVABILITÀ

Dato che la funzione è continua, posso usare il TH. LIMITE DERIVATA

$$f'(x)=\begin{cases} -4x+1 & x<0 \\ \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} & x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -4x+1 & x<0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x>0 \end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=1 \qquad f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}(-4x+1)=1$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$f'(0)=1$ quindi è derivabile

$$f'(x)=\begin{cases} -4x+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x>0 \end{cases}$$

$[-1,2]$

$$f(-1)=-3 \qquad f(2)=\frac{2}{5}$$

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{\frac{2}{5}+3}{3}=\frac{17}{15}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -4x+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x>0 \end{cases}$$

$[-1,2]$

1) $-4c+1 = \dfrac{17}{15} \Rightarrow -4c = \dfrac{2}{15}$

$$\Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{30}}$$

2) $\dfrac{1-c^2}{(c^2+1)^2} = \dfrac{17}{15} \Rightarrow 15(1-c^2) = 17(c^2+1)^2$

$$15 - 15c^2 = 17(c^4+1+2c^2)$$

$$17c^4 + 17 + 34c^2 + 15c^2 - 15 = 0$$

$$17c^4 + 49c^2 + 2 = 0 \qquad \Delta = 49^2 - 8\cdot 17 =$$

$$= 2265$$

$$c^2 = \frac{-49 \pm \sqrt{2265}}{34}$$

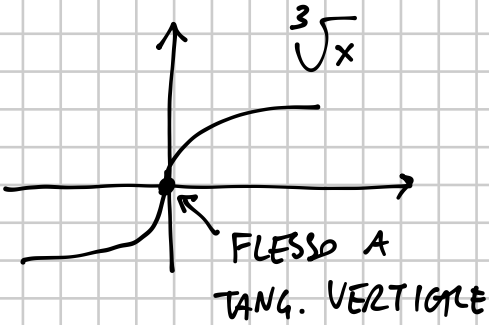
$$c^2 = \frac{-49+\sqrt{2265}}{34} < 0$$

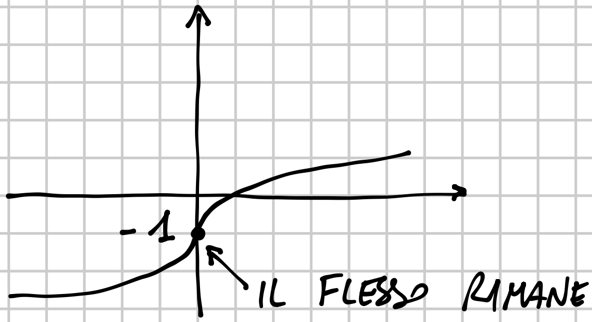
quindi per $x<0$ non esiste alcun punto c ....

63 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1, \qquad [-2; 1].$ È applicabile Lagrange?

f è continua

f NON è derivabile in 0





$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$$

$f'(0) = +\infty$, per cui f NON è derivabile in 0

NON è applicabile Lagrange!

70 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, $[-1; 2]$.

LAGRANGE ?

f è continua in 0

$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 6x + 2 & x > 0 \end{cases}$

"lontano" da 0

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) =$

$= \lim_{x \to 0^+} (6x+2) = 2$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) =$

$= \lim_{x \to 0^-} e^x = 1$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ $f'(0)$ non esiste e f non è quindi derivabile in 0

$\Downarrow$

<u>NON</u> è applicabile Lagrange

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, I intervallo

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è COSTANTE

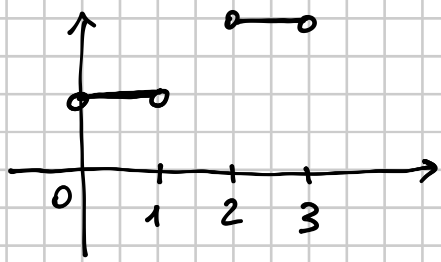
DIMOSTRAZIONE

Siano $x_1, x_2 \in I$. Applico TH. LAGRANGE all'int. $[x_1, x_2]$. Trovo $f(x_1) = f(x_2)$

ATTENZIONE!

I deve essere un intervallo!

Ad es., se $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 2 < x < 3 \end{cases}$



f è derivabile nel suo dominio, $f'(x) = 0$, ma f NON è costante (anche se lo è separatamente nei 2 sottointervalli)

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo $\quad f$ derivabile in I

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE CRESCENTE in I
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE in I

DIMOSTRAZIONE

Ricordiamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è strett. crescente (decrescente) se

$$\forall x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$\big(f(x_1) > f(x_2)\big)$$

Sia ad es. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ $\Rightarrow$ applico Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$

Trovo $c \in (x_1, x_2)$ tale che $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$ per ipotesi

$$\implies f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\implies f(x_1) < f(x_2)$$

Il caso $f'(x) < 0$ è analogo. $\qquad$ CVD

119 $y = 4x^5 - 10x^2 + 9$ $[x < 0 \vee x > 1]$

Trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza

Calcolo la derivata (prima) e ne studio il segno

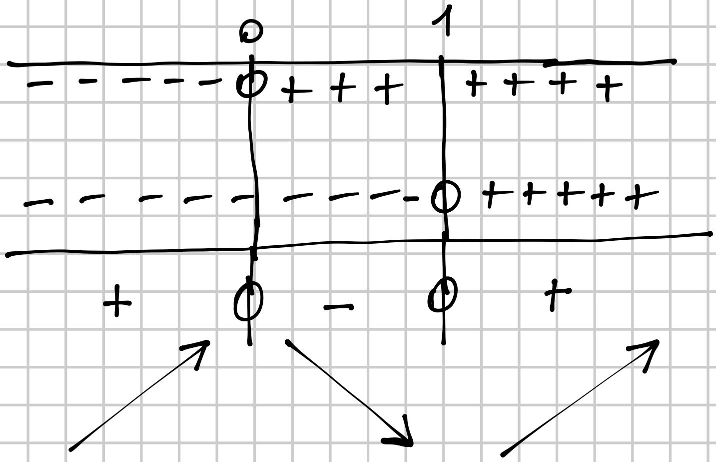
$$y' = 20x^4 - 20x$$

$$20x^4 - 20x > 0 \qquad \cancel{20}x(x^3-1) > 0$$

$$\underbrace{x}_{\boxed{1}}\underbrace{(x^3-1)}_{\boxed{2}} > 0$$

1] $x > 0$

2] $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$



La funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$

4.1. Teorema di De L'Hôpital. *Siano* $f, g : \left]a, a+\delta\right[\to \mathbf{R}$ *due funzioni derivabili tali che valga una delle condizioni seguenti*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 \tag{4.1}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty. \tag{4.2}$$

Si supponga inoltre $g'(x) \neq 0$ *per ogni* x *e che esista, finito o meno, il limite*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.3}$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{4.4}$$

e i due limiti sono uguali. □

238 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{0}{0} =$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

254 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{4x^3-2x} = \dfrac{0}{0} =$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{12x^2-2} = -\frac{1}{2}$$