17/1/2020

54 Si calcoli il limite della funzione $\frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\log \sin 2x}$, quando x tende a $\frac{\pi}{4}$.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2014, *quesito* 8)

$\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\log \sin 2x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}}{\underbrace{\log \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}}_{0}} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\frac{1}{\sin 2x}\, 2\cos 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{2\cot 2x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\cot\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x - \cos x}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = (*)$$

$$\left[\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)' = \frac{-2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = -\frac{2}{\sin^2 2x}\right]$$

$$(*) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

ATTENZIONE

Dopo aver applicato il TH. DI DE L'HÔPITAL, se il limite non esiste, non è detto che non esista quello di partenza!

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \underset{\downarrow \atop 0}{x} \, \overbrace{\sin \frac{1}{x}}^{\text{LIMITATA TRA } -1 \text{ E } 1} = 0$$

$\uparrow$ TH. CARABINIERI

Ma se applico DE L'HÔPITAL

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) \quad \text{NON ESISTE!}$$

51

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2015, *quesito* 9)

Dobbiamo avere continuità e derivabilità in 1

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2 - Kx + K) = \lim_{x \to 1^-} x^3 \qquad \underline{\text{CONTINUITÀ}}$$

$$1 - \cancel{K} + \cancel{K} = 1 \quad \forall K \in \mathbb{R} \text{ è continua}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x < 1 \\ 2x - K & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} (2x - K) = \lim_{x\to 1^-} 3x^2$$

$$2 - K = 3 \implies K = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = 5$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2x + 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 0}{2 - 0} = \frac{5}{2}$$

$$3x^2 = \frac{5}{2} \quad \vee \quad 2x + 1 = \frac{5}{2}$$

$$x^2 = \frac{5}{6} \qquad 2x = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \qquad x = \frac{3}{4} \text{ NON ACC. perché non compreso tra 1 e 2}$$

OK $\boxed{x = \sqrt{\frac{5}{6}}}$ perché compreso tra 0 e 1

53 Sia α tale che la funzione $f(x) = \alpha x - \dfrac{x^3}{1+x^2}$ risulti crescente. Provare che $\alpha \geq \dfrac{9}{8}$.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero (Americhe), Sessione ordinaria, 2004, quesito 2)

$$f'(x) = \alpha - \frac{3x^2(1+x^2) - 2x \cdot x^3}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \alpha - \frac{3x^2 + 3x^4 - 2x^4}{(1+x^2)^2} = \alpha - \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$$

Affinché f sia (strett. o no) crescente, deve essere $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\alpha - \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \geq \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Questa disuguaglianza deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Quindi studio la funzione $h(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$ per vedere al massimo che valore raggiunge.

Oppure, ponendo $x^2 = t$

$$\alpha \geq \frac{t^2 + 3t}{(1+t)^2}$$

$$(1+t)^2 \alpha \geq t^2 + 3t$$

$$(1 + t^2 + 2t)\alpha - t^2 - 3t \geq 0 \Rightarrow \alpha + \alpha t^2 + 2\alpha t - t^2 - 3t \geq 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)t^2 + (2\alpha - 3)t + \alpha \geq 0 \Rightarrow \text{pongo } \Delta \leq 0 \Rightarrow (2\alpha - 3)^2 - 4\alpha(\alpha - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2 + 9 - 12\alpha - 4\alpha^2 + 4\alpha \leq 0 \Rightarrow -8\alpha \leq -9 \Rightarrow \boxed{\alpha \geq \frac{9}{8}}$$