21/1/2020

50 Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione ordinaria, 2001, quesito 3)

$x_1 \neq x_2$

Siano x_1 e x_2 radici distinte di $p(x)$

$$p(x_1) = p(x_2) = 0$$

IPOTESI

Per il teorema di Rolle esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $p'(c) = 0$

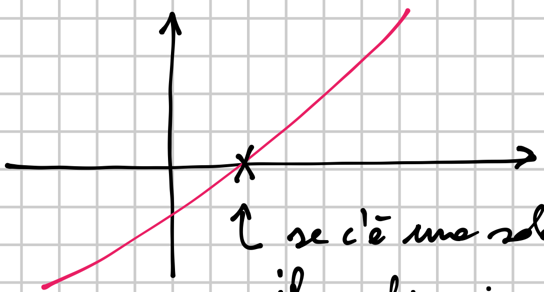
↓

le ipotesi del teorema sono soddisfatte perché i polinomi sono ovunque derivabili

OSS. Il teorema di Rolle, precisamente, è applicato alla restrizione di p all'intervallo $[x_1, x_2]$

52 Dimostrate, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una e una sola radice reale.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero (Europa), Sessione ordinaria, 2003, quesito 3)



se c'è una sola soluzione, il grafico incontra l'asse x in 1 solo punto

STRATEGIA = la funzione è continua e derivabile. Dimostro che è strett. crescente e che assume valori negativi e positivi (C.F.R. TEOREMA DEGLI ZERI). La soluzione è unica perché la funzione è strett. crescente

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = 6(x^2 + x + 1)$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

quindi $f'(x) > 0 \quad \forall x$

Controlliamo che f passa da valori negativi a valori positivi

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

57 La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1; 3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $]1; 3[$. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo $]1; 3[$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2002, *quesito* 8)

Le ipotesi del TH. DI LAGRANGE sono soddisfatte.

Quindi $\exists c \in (1, 3)$ tale che

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c)$$

$$\frac{f(3) - 1}{2} = f'(c) \qquad 0 \leq f'(c) \leq 2 \text{ per ipotesi}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{f(3) - 1}{2} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(3) - 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1 \leq f(3) \leq 5} \qquad \text{CVD}$$

58 Si calcoli il limite della funzione $y = \dfrac{x - \sin x}{x(1-\cos x)}$, quando x tende a 0.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva, 2007, quesito 8*)

$\left[\dfrac{1}{3}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos x + x\sin x} = \frac{0}{0} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + \sin x + x\cos x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x + \cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{1}{1+1+1+0} = \frac{1}{3}$$

OSSERVAZIONE

$$\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$$

1° TENTATIVO $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^{-2}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{-2x^{-3}} = \dots$

continuando ad applicare DE L'HÔPITAL peggiora la situazione

2° TENTATIVO $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

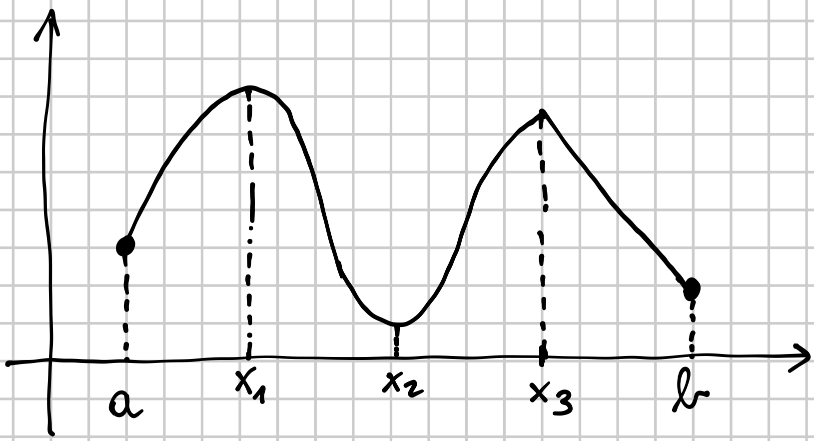
OPERATIVAMENTE, dove vanno ricercati?

$f : I \to \mathbb{R}$, f continua

I intervallo

I punti di max e min (relativi) vanno ricercati

- nei punti in cui la derivata si annulla
- nei punti in cui la funzione non è derivabile
- negli estremi dell'intervallo di definizione



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

a = p.to di min relativo (estremo)

x_1 = p.to di max (assoluto e relativo)

x_2 = p.to di min (assoluto e relativo)

x_3 = p.to di max relativo (p.to di non derivabilità)

b = p.to di min relativo (estremo)

Trovare max e min della funzione

39 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ [$x = 0$ max; $x = 2$ min]

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

derivabile ovunque, definita in un intervallo illimitato, per cui i candidati max e min sono gli zeri della derivata

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

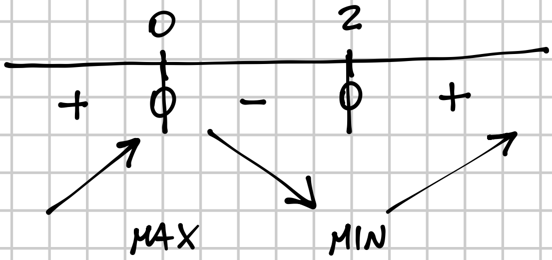
$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$ $\quad 3x(x-2) = 0$ $\quad x = 0$ $\quad x = 2$

CANDIDATI MAX E MIN

Studio il segno della derivata

$3x^2 - 6x > 0$ $\quad 3x(x-2) > 0$ $\quad x < 0 \lor x > 2$



$x = 0$ p.to di max rel.

$x = 2$ p.to di min rel.

Trovare max e min.

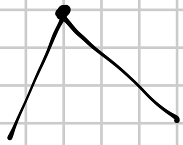
96 $y = \begin{cases} x^2+4x & \text{se } x<0 \\ -3x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua in 0

$f'(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{se } x<0 \\ -3 & \text{se } x>0 \end{cases}$ in $x=0$ non c'è derivabilità

$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -3$

$x=0$ è un punto angoloso

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 4$

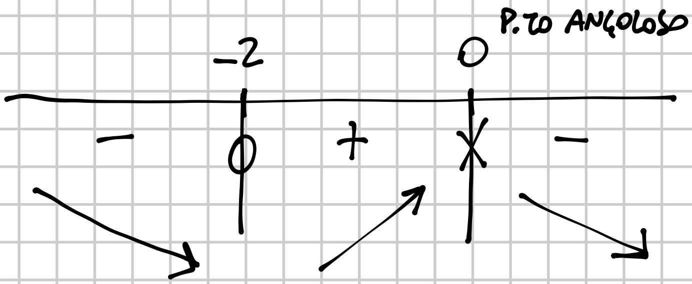


Zeri della derivata:

$f'(x)=0 \quad 2x+4=0 \Rightarrow x=-2$

Segno della derivata $\quad 2x+4>0 \Rightarrow x>-2$

$(-2<x<0)$



$x=-2$ min $\quad x=0$ max