24/1/2020

59 Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso [1; 2], si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2007, *quesito* 3)

$f:[1,2] \to \mathbb{R}$ per poter applicare Rolle deve essere $f(1) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + K - K + 3 = 4 \\ f(2) = 8 + 4K - 2K + 3 \end{array}\right| \Longrightarrow \quad 2K + 11 = 4$$

$$2K = -7 \qquad \boxed{K = -\frac{7}{2}}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + \frac{7}{2}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + \frac{7}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$6x^2 - 14x + 7 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 42}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{7}}{6}$$

$$1 < \frac{7+\sqrt{7}}{6} < 2$$

↑ è questo

$\left(\text{infatti } \frac{7-\sqrt{7}}{6} < 1\right)$

↑ DA SCARTARE

$$\boxed{C = \frac{7+\sqrt{7}}{6}}$$

COME VERIFICARE LE DISUGUAGLIANZE

$$2 < \sqrt{7} < 3 \Longrightarrow 7 + 2 < 7 + \sqrt{7} < 7 + 3$$

$$\Longrightarrow \frac{7+2}{6} < \frac{7+\sqrt{7}}{6} < \frac{7+3}{6} \qquad \frac{9}{6} < \frac{7+\sqrt{7}}{6} < \frac{10}{6}$$

60 Calcola la derivata della funzione:

$$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso sperimentale, Sessione suppletiva*, 2001, *quesito* 2)

$\left[f'(x) = 0;\ f(x) = \frac{\pi}{4} \text{ se } x > -1;\ f(x) = -\frac{3}{4}\pi \text{ se } x < -1\right]$

$f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{\cancel{(x+1)^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{(x+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{x^2+1+\cancel{2x}+x^2+1-\cancel{2x}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x^2+1)} = 0$$

Applicando il teorema della derivata nulla separatamente a ciascuno degli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$, troviamo che in ognuno di essi la funzioni è costante, ma in generale avranno valori diversi

$(-1, +\infty) \to f(0) = \arctan(0) - \arctan(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

$(-\infty, -1) \to f(-\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{-\sqrt{3}+1}\right) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{12}\pi =$

$\frac{-1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}{1-3} = \frac{-2\sqrt{3}-4}{-2} = \sqrt{3}+2$

$= -\frac{9}{12}\pi = -\frac{3}{4}\pi$

$$y = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$$

$$\tan y = \tan\left(\arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan y = \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + x \cdot \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x^2 \cancel{+x} \cancel{-x} + 1}{\cancel{x+1}}}{\frac{\cancel{x} + 1 + x^2 \cancel{-x}}{\cancel{x+1}}} =$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \qquad \tan y = 1$$

$$y = \frac{\pi}{4} \vee y = -\frac{3}{4}\pi$$

sono i due possibili valori che assume la funzione

Trovare max e min

82 $y = e^{2x-1} + \frac{2}{3}e^{-3x} + 6$ $\left[x = + \frac{1}{5} \text{ min}\right]$

$$f'(x) = 2e^{2x-1} - 2e^{-3x} = 2\left(e^{2x-1} - e^{-3x}\right)$$

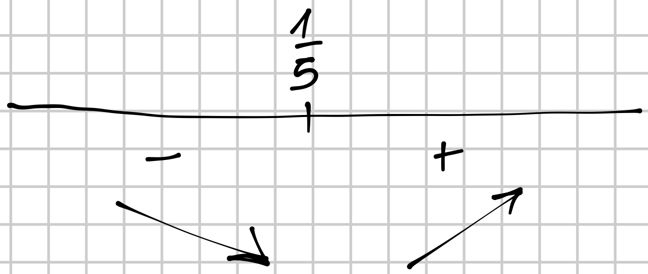
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x-1} - e^{-3x} = 0 \Rightarrow e^{2x-1} = e^{-3x}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = -3x \qquad 5x = 1 \qquad x = \frac{1}{5}$$

$f'(x) > 0$

$$e^{2x-1} - e^{-3x} > 0 \qquad e^{2x-1} > e^{-3x} \qquad 2x - 1 > -3x$$

$$x > \frac{1}{5}$$



$x = \frac{1}{5}$ P.TO DI MINIMO

102 $y = \left| \dfrac{x-1}{x+2} \right|$

Trovare max e min

$D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$$f'(x) = \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot \frac{\cancel{x}+2 \cancel{-x}+1}{(x+2)^2} = \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot \frac{3}{(x+2)^2}$$

$\forall x \neq -2 \quad \forall x \neq 1$

SI ANNULLA IL MODULO

Controlliamo il punto $x = 1$, dove si annulla il modulo

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot \frac{3}{(x+2)^2} =$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot \frac{3}{(x+2)^2} = -1 \cdot \frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \qquad \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \cdot \underbrace{\frac{3}{(x+2)^2}}_{\text{sempre} > 0} > 0 \implies \text{sign}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > 0$$

$$\implies \frac{x-1}{x+2} > 0$$

$\boxed{N}$ $x - 1 > 0 \quad x > 1$

$\boxed{D}$ $x + 2 > 0 \quad x > -2$

		-2		1	
N	$-$		$-$		$+$
D	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

	-2		1	
$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$

ESCLUSO DAL DOMINIO

P.TO DI MINIMO

$x = 1$ P.TO DI MINIMO (P.TO ANGOLOSO)

103 $y = \dfrac{|x^3|}{x^2 - 1}$

Trovare max e min

$$f: (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sign} x^3 \cdot 3x^2 (x^2 - 1) - 2x|x^3|}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sign} x^3 (3x^4 - 3x^2) - 2x|x^3|}{(x^2-1)^2} \qquad x \neq 0 \quad x \neq \pm 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} & x > 0 \quad x \neq 1 \\ \dfrac{-3x^4 + 3x^2 + 2x^4}{(x^2-1)^2} & x < 0 \quad x \neq -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} & x > 0 \quad x \neq 1 \\ \dfrac{-x^4 + 3x^2}{(x^2-1)^2} & x < 0 \quad x \neq -1 \end{cases}$$

Controllo in $x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^4 + 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile anche in $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} & x > 0 \quad x \neq 1 \\ \dfrac{-x^4 + 3x^2}{(x^2-1)^2} & x < 0 \quad x \neq -1 \end{cases} \qquad f'(0) = 0$$

ZERI DI $f'(x)$

$$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \underset{x>0}{\Rightarrow} x = \sqrt{3}$$

$$\frac{-x^4 + 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

CANDIDATI MAX E MIN $\quad -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$

SEGNO DELLA DERIVATA

$f'(x) > 0$

$$\frac{x^4 - 3x^2}{\cancel{(x^2-1)^2}} > 0 \qquad \cancel{x^2}(x^2-3) > 0 \qquad x > \sqrt{3}$$

$x > 0 \quad x \neq 1$

$$\frac{-x^4 + 3x^2}{\cancel{(x^2-1)^2}} > 0 \qquad \cancel{x^2}(-x^2+3) > 0 \Rightarrow -x^2 > -3 \Rightarrow x^2 < 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < x < 0 \qquad x \neq -1$$

$x < 0 \quad x \neq -1$

$f'(x)$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
	$\searrow$	MIN	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

$x = -\sqrt{3}$ P.TO DI MIN

$x = 0$ P.TO DI MAX

$x = \sqrt{3}$ P.TO DI MIN