30/1/2020

403 Verifica che, se due numeri (POSITIVI) hanno prodotto positivo e costante, la somma dei loro cubi è minima quando i due numeri sono uguali.

$x_1 = 1°$ numero

$x_2 = 2°$ numero

$x_1 \cdot x_2 = c > 0$

$\Downarrow$

$x_1 = 1°$ numero

$x_2 = \frac{c}{x_1} = 2°$ numero

$y = x_1^3 + x_2^3$ funzione da minimizzare

$\Downarrow \quad x_1 \rightsquigarrow x$

$y = x^3 + \frac{c^3}{x^3} \qquad x \neq 0$

$y = \frac{x^6 + c^3}{x^3}$

$y' = \frac{6x^5 \cdot x^3 - 3x^2(x^6 + c^3)}{(x^3)^2} =$

$= \frac{3\cancel{x^2}(2x^6 - x^6 - c^3)}{x^{\cancel{6}\,4}} =$

$= \frac{3(x^6 - c^3)}{x^4}$

Bisogna verificare che il minimo è raggiunto in corrispondenza di x tale che $x = \frac{c}{x}$

$\Updownarrow \qquad x > 0$

$x^2 = c$

$\Updownarrow$

$x = \sqrt{c}$

ZERI

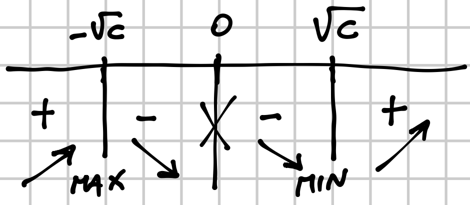
$x^6 - c^3 = 0 \Rightarrow x^6 = c^3$

$x = \pm\sqrt[6]{c^3} = \pm\sqrt{c}$

STUDIO SEGNO

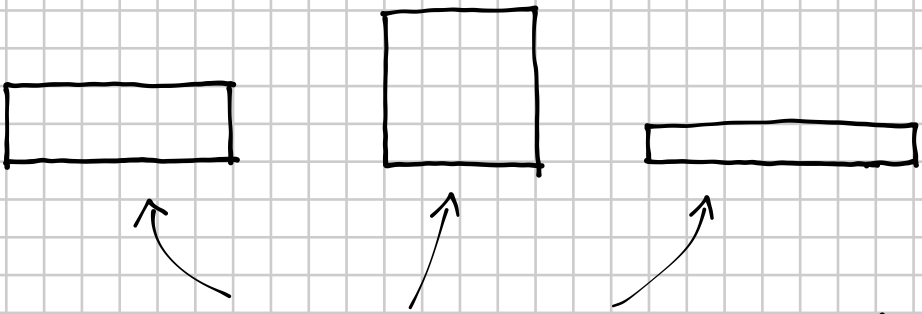
$y' > 0$

$\frac{\cancel{3}(x^6 - c^3)}{\cancel{x^4}} > 0 \Rightarrow x^6 - c^3 > 0 \qquad x < -\sqrt{c} \quad \vee \quad x > \sqrt{c}$



$x = \sqrt{c}$ P.TO DI MINIMO $(x > 0)$

Dimostrare che fra tutti i rettangoli di perimetro fissato $2p$, quello di area massima è il quadrato.



STESSO PERIMETRO $2p = 16$ (in questo caso)

$2p$ = perimetro

x = lato del rettangolo

$p - x$ = altro lato del rettangolo

DOMINIO: $D = (0, p)$

AREA $\mathcal{A}(x) = x(p-x) = px - x^2$

$\mathcal{A} : (0, p) \to \mathbb{R}$

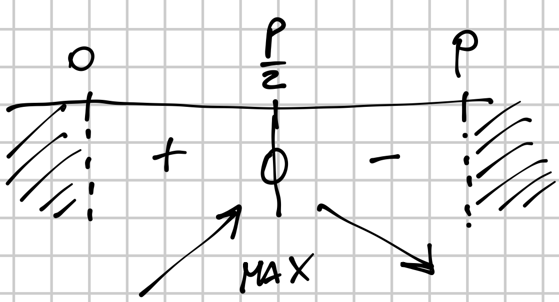
$\mathcal{A}'(x) = p - 2x$

ZERI $p - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{p}{2}$

SEGNO

$\mathcal{A}'(x) > 0 \qquad p - 2x > 0 \Longrightarrow 0 < x < \frac{p}{2}$

$0 < x < p$



$\frac{p}{2}$ p.to di massimo

1° lato $x = \frac{p}{2}$

2° lato $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$

quindi il rettangolo di area max è il quadrato