31/1/2020

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x)=\frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x=3$, $x=-3$ e $y=5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

$y=5$ è asintoto orizzontale $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^2+d} = 5$

quindi $p(x) = 5x^2 + \alpha x + \beta$

$f(0)=0$

$f\left(\frac{12}{5}\right)=0$

$\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \end{array}\right\}$ ASINTOTI VERTICALI $\Rightarrow$ x^2+d si annulla per $x=\pm 3$

$\Downarrow$

$d=-9$

$$f(x)=\frac{5x^2+\alpha x+\beta}{x^2-9}$$

$f(0)=0 \Rightarrow \beta=0$ $\qquad f(x)=\frac{5x^2+\alpha x}{x^2-9}$

$f\left(\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow 5\left(\frac{12}{5}\right)^2+\alpha\left(\frac{12}{5}\right)=0 \qquad \frac{144}{5}+\alpha\frac{12}{5}=0$

$\alpha=-12$

$$f(x)=\frac{5x^2-12x}{x^2-9}$$

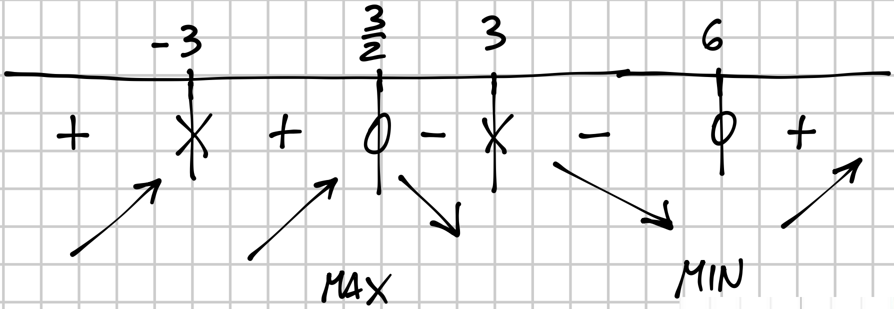
$$f'(x)=\frac{(10x-12)(x^2-9)-2x(5x^2-12x)}{(x^2-9)^2}=\frac{\cancel{10x^3}-90x-12x^2+108-\cancel{10x^3}+24x^2}{(x^2-9)^2}$$

$$=\frac{12x^2-90x+108}{(x^2-9)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-90x+108=0 \qquad 2x^2-15x+18=0$

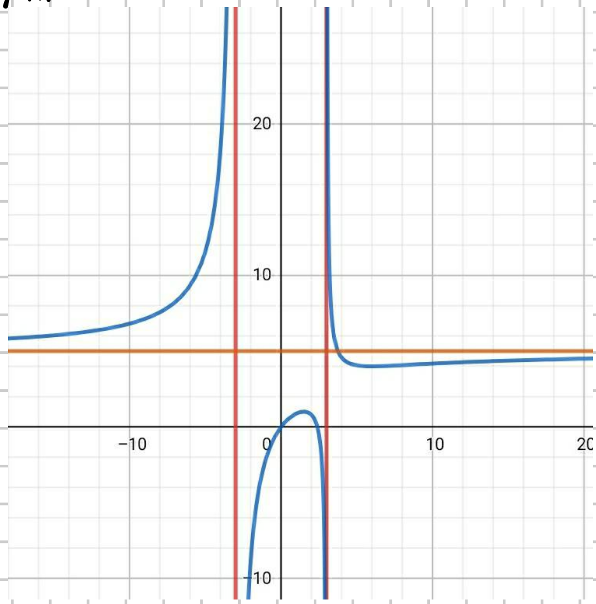
$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{4}=\frac{15\pm 9}{4}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ 6\end{cases}$$

$f'(x) > 0 \qquad 12x^2 - 90x + 108 > 0 \qquad x < \frac{3}{2} \quad \vee \quad x > 6$



$x = \frac{3}{2}$ p.to di max relativo

$x = 6$ p.to di min relativo



2. È assegnata la funzione

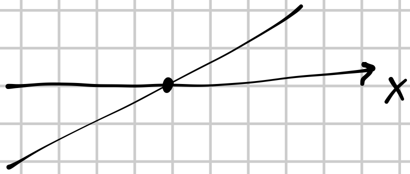
$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{x}}$$

$$g'(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \ldots + 2019\,x^{2018} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi g è strett. crescente e interseca l'asse x al massimo in un solo punto!



Siccome $g(0) = 0$, 0 è l'unica soluzione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{(1{,}1)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{e^{x \ln 1{,}1}} = 0$$

perché l'esponenziale $e^{\varepsilon x}$ $(\varepsilon > 0)$ è infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di x

$$(1{,}1)^x = e^{\ln (1{,}1)^x} = e^{x \cdot \underbrace{\ln(1{,}1)}_{>0}} = e^{\varepsilon x} \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

$$g(x) \sim x^{2019} \quad \text{per } x \to +\infty$$

con De l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + x^3 + \ldots + x^{2019}}{e^{\ln(1{,}1)\cdot x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + 3x^2 + \ldots + 2019\,x^{2018}}{\ln(1{,}1)\cdot e^{\ln(1{,}1)\,x}} \overset{H}{=} \ldots$$

$$\ldots \overset{H}{=} \frac{2019!}{[\ln(1{,}1)]^{2019} \cdot e^{\ln(1{,}1)\cdot x}} = \frac{\text{COSTANTE} > 0}{+\infty} = 0$$