18/2/2020

$f(x) = \sqrt[3]{2-2x^3}$ STUDIARE LA CONCAVITÀ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (2-2x^3)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}(2-2x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\cancel{6}^{\,2}x^2) = \frac{-2x^2}{\sqrt[3]{(2-2x^3)^2}}$ $\quad f'(1) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$x \neq 1$

1 è un FLESSO A TANGENTE VERTICALE

f' non cambia segno, cioè è sempre negativo. In 0 (dove la derivata si annulla) si avrà un flesso a tangente orizzontale

$f'(x) = -2x^2(2-2x^3)^{-\frac{2}{3}}$ $\quad x \neq 1$

$f''(x) = (-4x)(2-2x^3)^{-\frac{2}{3}} - 2x^2\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)(2-2x^3)^{-\frac{2}{3}-1}(-\cancel{6}^{\,2}x^2) =$

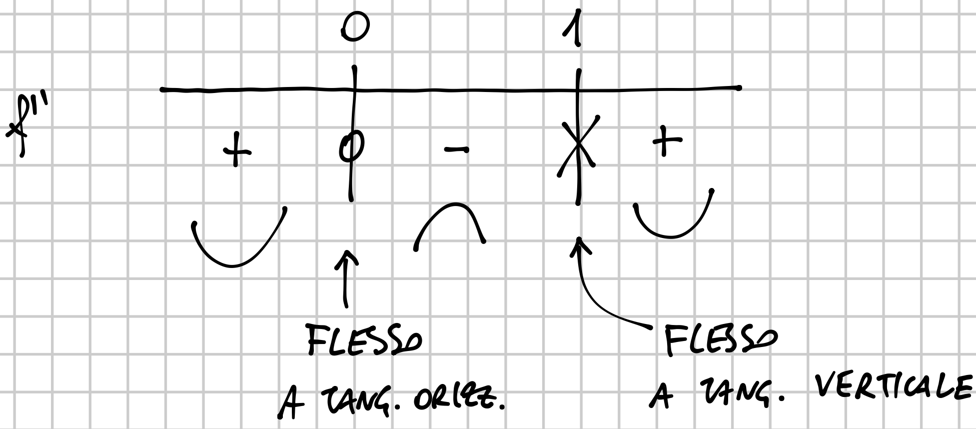
$= \underbrace{(2-2x^3)^{-\frac{2}{3}}}_{\substack{>0 \\ \forall x \neq 1}}\left[-4x - 8x^4(2-2x^3)^{-1}\right] =$

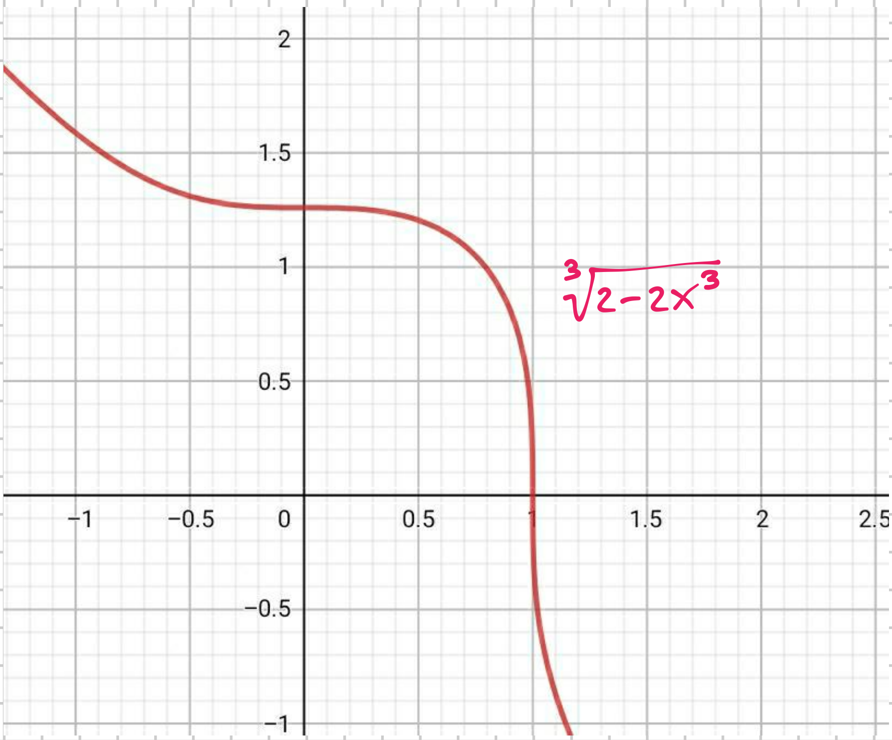
$= \frac{1}{\sqrt[3]{(2-2x^3)^2}}\left[-4x - \frac{\cancel{8}^{\,4}x^4}{\cancel{2}(1-x^3)}\right] = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-2x^3)^2}} \cdot \frac{-4x+\cancel{4x^4}-\cancel{4x^4}}{1-x^3} =$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{(2-2x^3)^2}} \frac{4x}{x^3-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-2x^3)^2}} \frac{4x}{(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{>0\ \forall x}}$ $\quad x \neq 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ CANDIDATO FLESSO

$f''(x) > 0 \implies \dfrac{x}{x-1} > 0 \qquad x < 0 \ \vee \ x > 1$





90 $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$

STUDIO DI FUNZIONE

$y = f(x)$

1) DOMINIO

$x^2 - 6x + 9 \neq 0 \qquad (x-3)^2 \neq 0 \qquad x \neq 3$

$D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

2) PARI/DISPARI ?

$f(x) \stackrel{?}{=} f(-x) \qquad f(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$f(-1) = 0$ NON È PARI

NON È DISPARI

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI

$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9} \\ x = 0 \quad (\text{asse } y) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{2}{9} \end{cases}$

$A\left(0, -\dfrac{2}{9}\right)$

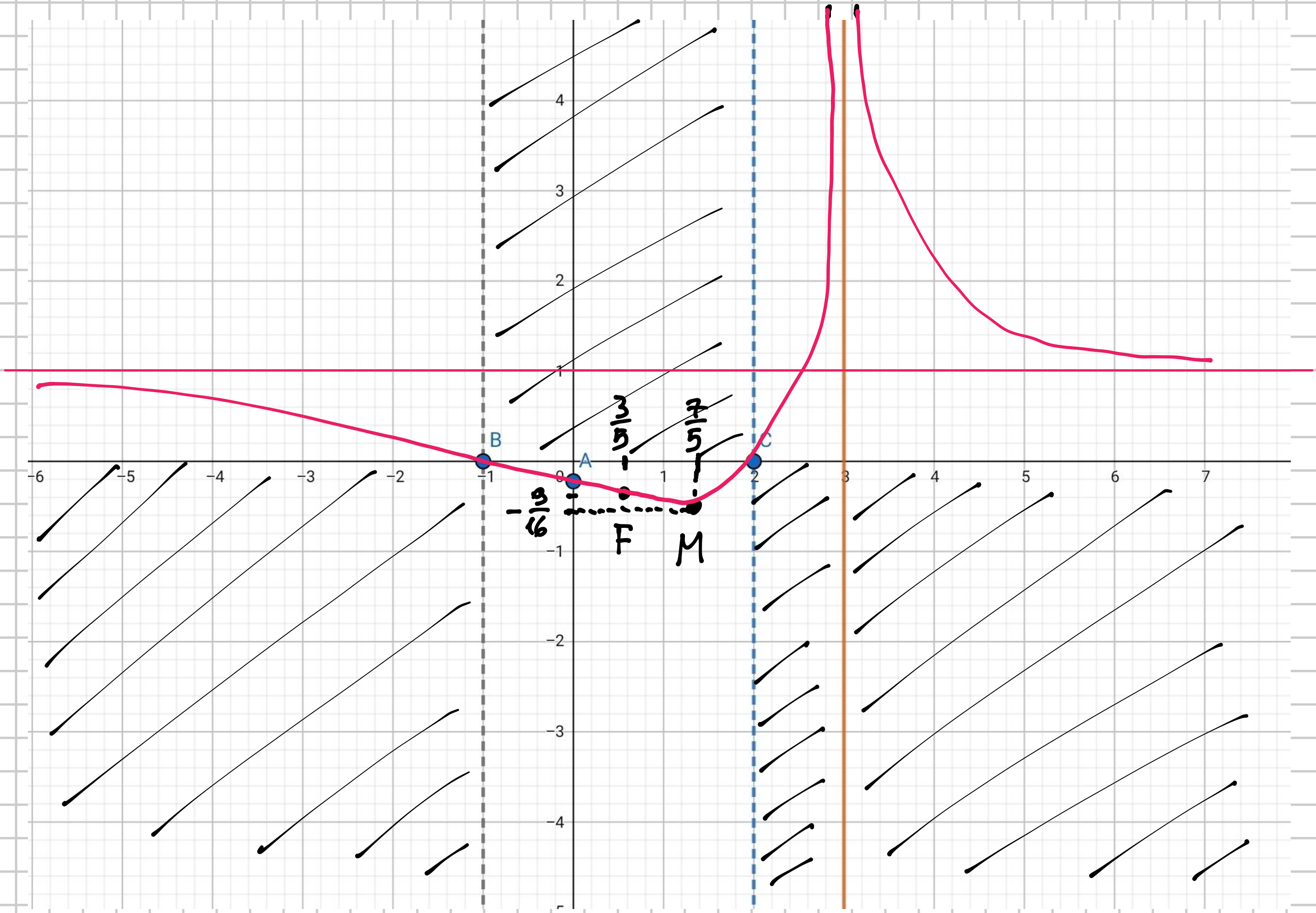
$\begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{\cancel{x^2 - 6x + 9}} = 0 \\ y = 0 \quad (\text{asse } x) \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$B(-1, 0) \qquad C(2, 0)$

4) STUDIO SEGNO

$\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9} > 0 \qquad \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-3)^2} > 0 \Rightarrow (x < -1 \lor x > 2) \land x \neq 3$

	-1		2		3	
$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$	$+$



5) LIMITI (AGLI ESTREMI DEL DOMINIO $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 1$$

La retta $y = 1$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x - 2}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - x - 2}{(x-3)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

La retta $x = 3$ è ASINTOTO VERTICALE

6) ASINTOTI (già fatto) Non ci sono asintoti obliqui, essendoci già un asintoto orizz. per $x \to \pm\infty$

7) DERIVATA PRIMA

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2-6x+9)-(2x-6)(x^2-x-2)}{(x^2-6x+9)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}-12x^2+18x-x^2+\cancel{6x}-9-\cancel{2x^3}+2x^2+4x+6x^2-\cancel{6x}-12}{(x-3)^4}$$

$$=\frac{-5x^2+22x-21}{(x-3)^4}$$

ZERI

$$f'(x)=0 \Rightarrow -5x^2+22x-21=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=11^2-(-5)(-21)=$$

$$=121-105=16$$

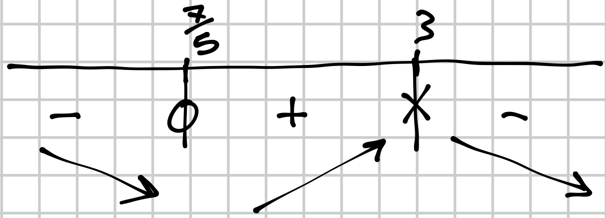
$$x=\frac{-11\pm 4}{-5}=\begin{cases}3 & \text{NON ACC. (FUORI DAL DOMINIO)}\\ \frac{7}{5} & \text{CANDIDATO MAX/MIN}\end{cases}$$

SEGNO

$$f'(x)>0 \quad \frac{-5x^2+22x-21}{(x-3)^4}>0 \Rightarrow -5x^2+22x-21>0$$

$$5x^2-22x+21<0$$

$$\frac{7}{5}<x<3$$



$\frac{7}{5}$ è p.to di minimo

PUNTO DEL GRAFICO CORRISPONDENTE AL MINIMO

$$M\left(\frac{7}{5}, f\left(\frac{7}{5}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right)=\frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2-\frac{7}{5}-2}{\left(\frac{7}{5}\right)^2-6\cdot\frac{7}{5}+9}=-\frac{9}{16}$$

$$M\left(\frac{7}{5},-\frac{9}{16}\right)$$

8) DERIVATA SECONDA

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-3)^2} \qquad f'(x) = \frac{-5x^2 + 22x - 21}{(x-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-10x+22)(x-3)^4 - 4(x-3)^3(-5x^2+22x-21)}{(x-3)^8} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)^2}\left[(-10x+22)\overbrace{(x^2-6x+9)}^{(x-3)^2} - 4(x-3)(-5x^2+22x-21)\right]}{(x-3)^{\cancel{8}6}} =$$

$$= \frac{(x-3)\left[(-10x+22)(x-3) + 20x^2 - 88x + 84\right]}{(x-3)^6} =$$

$$= \frac{(x-3)\left[-10x^2 + 30x + 22x - 66 + 20x^2 - 88x + 84\right]}{(x-3)^6} =$$

$$= \frac{(x-3)\left[10x^2 - 36x + 18\right]}{(x-3)^6} = \frac{2(x-3)(5x^2-18x+9)}{(x-3)^6}$$

ZERI DI f''

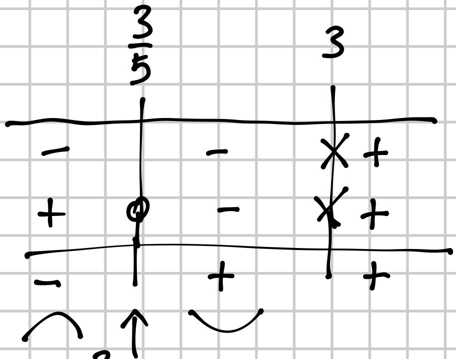
$x = 3$ NON ACC. (FUORI DAL DOMINIO)

$5x^2 - 18x + 9 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 81 - 45 = 36$

$$x = \frac{9 \pm 6}{5} = \begin{cases} 3 & \text{NON ACC.} \\ \frac{3}{5} & \text{CANDIDATO FLESSO} \end{cases}$$

SEGNO DI f'' $\quad x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$5x^2 - 18x + 9 > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{5} \vee x > 3$



$\frac{3}{5}$ è un FLESSO

$f\left(\frac{3}{5}\right) = \dots\dots = -\frac{7}{18}$ $\qquad$ $F\left(\frac{3}{5}, -\frac{7}{18}\right)$

Per vedere la pendenza del flesso, si dovrebbe calcolare $f'\left(\frac{3}{5}\right)$