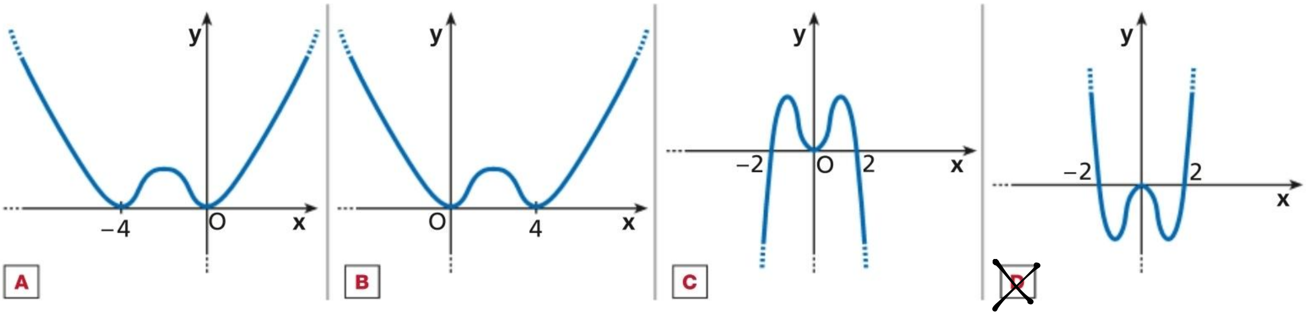
20/2/2020

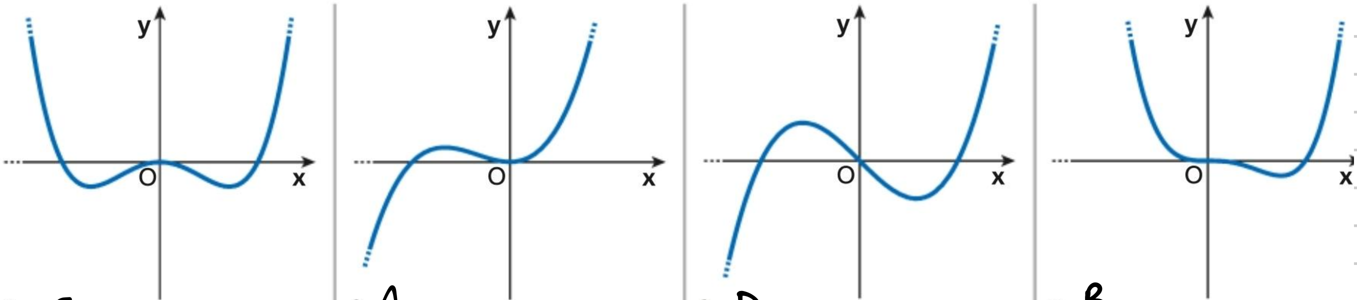
26 TEST A quale dei seguenti grafici corrisponde la funzione $y = x^4 - 4x^2$?



$x^4 - 4x^2 \sim x^4$ per $x \to \pm\infty$

55 ASSOCIA a ogni funzione il suo grafico senza svolgere lo studio completo.

a. $y = x^3 + x^2$ b. $y = x^4 - x^3$ c. $y = x^4 - x^2$ d. $y = x^3 - x$



1 C 2 A 3 D 4 B

$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
unica pari	asintotica a x^3 per $x \to \pm\infty$	unica dispari	asintotica a x^4 per $x \to \pm\infty$

363 Sia γ la circonferenza del piano cartesiano con il diametro di estremi $O(0; 0)$ e $A(4; 4)$. Una retta passante per l'origine, di equazione $y = mx$, interseca la circonferenza in P.

a. Scrivi l'equazione della circonferenza.

b. Scrivi l'ascissa del punto P in funzione di m e studia la funzione ottenuta.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0; \text{ b) } f(m) = \dfrac{4 + 4m}{1 + m^2}\right]$

a) $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (2, 2)$ raggio $r = \overline{CO} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

Centro circonf.

$C(\alpha, \beta)$ $r \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$

$\gamma: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

$x^2 - 4x + \cancel{4} + y^2 - 4y + \cancel{4} = \cancel{8}$ $\quad x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow x^2 + m^2x^2 - 4x - 4mx = 0$

$(1+m^2)x^2 - 4(1+m)x = 0$

0 è sempre soluzione dell'equazione

$m = -1 \Rightarrow$ ci sono due soluzioni coincidenti, entrambe 0, e la retta è tangente alla circonferenza $\Rightarrow P \equiv O$

ASCISSA DI P

$\cancel{x}\left[(1+m^2)x - 4(1+m)\right] = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4(1+m)}{1+m^2}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(m) = \dfrac{4(1+m)}{1+m^2}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \dfrac{4(1+x)}{1+x^2}$

INT. ASSI

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

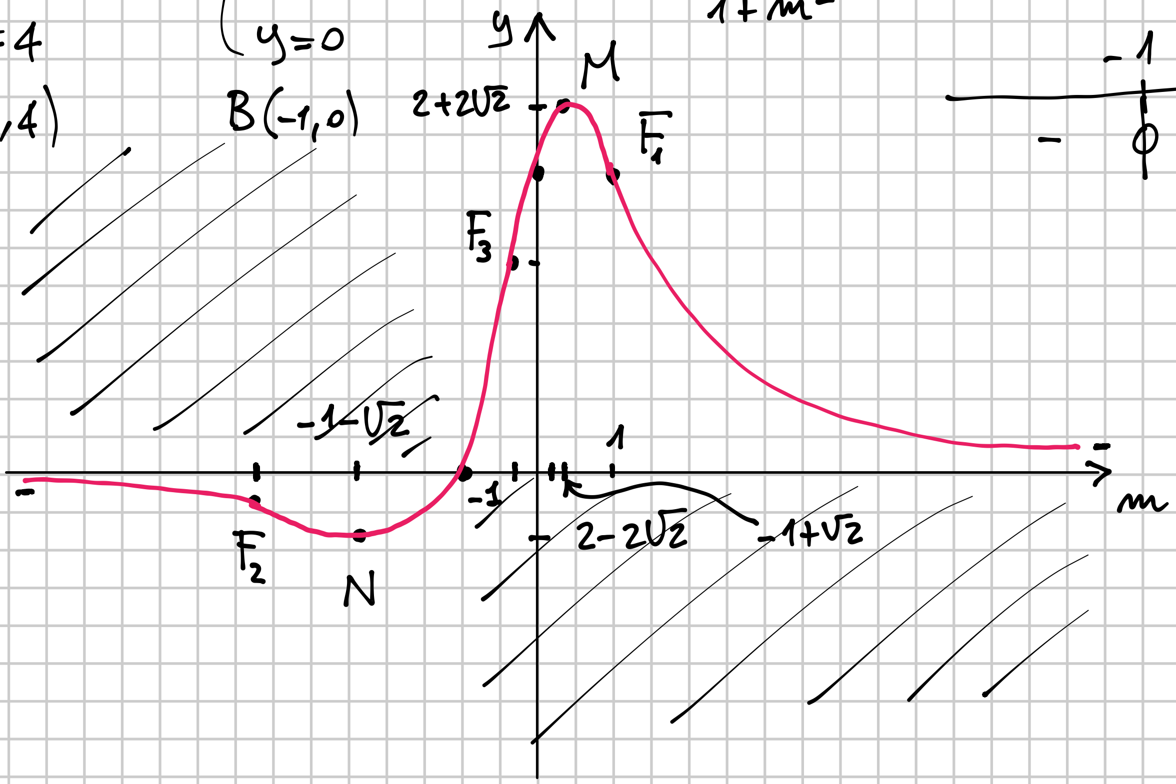
$A(0,4) \qquad B(-1,0)$

SEGNO

$\dfrac{4(1+x)}{1+x^2} > 0 \implies x > -1$

-1

$- \quad 0 \quad +$



LIMITI

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4(1+x)}{1+x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} \dfrac{4(1+x)}{1+x^2} = 0^- \implies y = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = 4\,\frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = 4\,\frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies -x^2-2x+1=0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{-1} = \begin{cases} -1-\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \implies -x^2-2x+1>0 \implies x^2+2x-1<0 \implies -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$$

$-1-\sqrt{2} \qquad -1+\sqrt{2}$

$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

MIN MAX

$$f(-1-\sqrt{2}) = 4\,\frac{\cancel{1}-\cancel{1}-\sqrt{2}}{1+(-1-\sqrt{2})^2} = -\frac{4\sqrt{2}}{1+1+2+2\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = -\frac{2(2\sqrt{2}-2)}{4-2} = 2-2\sqrt{2} \simeq -0,83$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = 4\,\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\sqrt{2}}{1+(-1+\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{1+1+2-2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2\sqrt{2}+2)}{4-2} = 2+2\sqrt{2} \simeq 4,8$$

MAX $M(-1+\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2})$ MIN $N(-1-\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2})$

<u>DERIVATA SECONDA</u> $f'(m) = 4\,\frac{-m^2-2m+1}{(1+m^2)^2}$

$$f''(m) = 4\,\frac{(-2m-2)(1+m^2)^2 - 2(1+m^2)(2m)(-m^2-2m+1)}{(1+m^2)^4} =$$

$$= \frac{4}{(1+m^2)^4}\left[(-2m-2)(1+m^4+2m^2) - 2(2m+2m^3)(-m^2-2m+1)\right] =$$

$$= \frac{4}{(1+m^2)^4}\left[-2m-2m^5-\cancel{4m^3}-2-2m^4-4m^2+\cancel{4m^3}+8m^2-4m\right.$$

$$\left.+4m^5+8m^4-4m^3\right] = \frac{4}{(1+m^2)^4}\left[2m^5+6m^4-4m^3+4m^2-6m-2\right] =$$

$$= \frac{8}{(1+m^2)^4}\underbrace{\left[m^5+3m^4-2m^3+2m^2-3m-1\right]}_{\text{SCOMPONIBILE CON RUFFINI}}$$

$$f''(x)=\frac{8}{(1+x^2)^4}\left[x^5+3x^4-2x^3+2x^2-3x-1\right]=$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 3 & -2 & 2 & -3 & -1 \\
1 & & 1 & 4 & 2 & 4 & 1 \\
\hline
 & 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & //
\end{array}$$

$$=\frac{8}{(1+x^2)^4}\left(x^4+4x^3+2x^2+4x+1\right)(x-1)=$$

$$=\frac{8(x-1)}{(1+x^2)^4}\left(x^4+4x^3+x^2+x^2+4x+1\right)=$$

$$=\frac{8(x-1)}{(1+x^2)^4}\left(x^2(x^2+4x+1)+(x^2+4x+1)\right)=$$

$$=\frac{8}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}\cancel{(x^2+1)}(x^2+4x+1)(x-1)=$$

$$=\frac{8}{\underbrace{(1+x^2)^3}_{>0\ \forall x}}(x^2+4x+1)(x-1)$$

ZERI DI f''

$$x^2+4x+1=0 \Rightarrow x=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3} \ \vee \ x-1=0 \Rightarrow x=1$$

SEGNO DI f'

	$-2-\sqrt{3}$		1		$-2+\sqrt{3}$	
+	0	−		−	0	+
−		−	0	+		+
−	0	+	0	−	0	+
$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$

FLESSI

$$f(m) = \frac{4(m+1)}{1+m^2}$$

$$f(1) = \frac{4 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 4 \qquad F_1\ (1, 4)$$

$$f(-2-\sqrt{3}) = 4\,\frac{-1-\sqrt{3}}{1+4+3+4\sqrt{3}} = 4\,\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \simeq -0{,}73$$

$$-2-\sqrt{3} \simeq -3{,}7 \qquad F_2\left(-2-\sqrt{3}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$f(-2+\sqrt{3}) = 4\,\frac{-1+\sqrt{3}}{1+4+3-4\sqrt{3}} = 4\,\frac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} \simeq 2{,}7$$

$$-2+\sqrt{3} \simeq -0{,}27$$