

21/3/2020

DEFINIZIONE | Varianza

Dati n numeri x_1, x_2, \dots, x_n , di media aritmetica \bar{x} , si chiama loro **varianza**, e si indica con il simbolo σ^2 , la media aritmetica dei quadrati degli scarti da \bar{x} :

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad [1]$$

TEOREMA 2 | Formula abbreviata per la varianza

Dati n numeri x_1, x_2, \dots, x_n , di media aritmetica \bar{x} , la loro varianza è espressa dalla formula:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2 \quad [2]$$

DIMOSTRAZIONE

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2 + \dots + x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2x_1\bar{x} - \dots - 2x_n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2 - 2\bar{x}(x_1 + \dots + x_n) + n\bar{x}^2}{n} =$$

$$= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \underbrace{\frac{(x_1 + \dots + x_n)}{n}}_{\bar{x}} + \frac{\cancel{n}\bar{x}^2}{\cancel{n}} =$$

$$= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

QED

86 Barbara, nei primi tre compiti in classe del quadrimestre, ha ottenuto la media del 6. Il suo professore ha programmato altri due compiti in classe.

- a. Barbara può ancora sperare di avere la media dell'8 nei voti dei compiti in classe del primo quadrimestre?
b. Se nel quarto compito in classe Barbara prende 7, quanto deve prendere nel quinto compito in classe perché la media complessiva dei voti del primo quadrimestre sia 7?

[a. No; b. 10]

$$a) \quad \bar{x}_{\text{primi 3}} = 6 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\Downarrow$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \cdot 6 = 18$$

Supponiamo che $x_4 = x_5 = 10$, ovvero che

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{18 + 20}{5} = \frac{38}{5} = 7,6 < 8$$

$$b) \quad \bar{x} = \frac{18 + 7 + x_5}{5} = 7 \quad \text{equazione da risolvere}$$

$$\frac{25 + x_5}{5} = \frac{35}{5}$$

$$x_5 = 35 - 25 = 10$$

90 I voti nell'ultimo compito di matematica in una classe sono stati i seguenti:

5	6	6	7	7,5	6,5	8	4	7	7	10	3	4,5	5,5	8	8	7	9	4	6	6,5	5
---	---	---	---	-----	-----	---	---	---	---	----	---	-----	-----	---	---	---	---	---	---	-----	---

- Rappresenta tramite una tabella la distribuzione delle frequenze dei voti del compito.
- Determina la media, la mediana e la moda della distribuzione.
- Nel giorno dello svolgimento del compito in classe c'era un assente, che ha recuperato il compito in classe la settimana successiva. Considerando anche il voto dell'assente, la media dei voti nel compito in classe è stata di 6,5. Quale voto ha avuto l'alunno assente nel compito?

b. Media = $\frac{281}{44} \approx 6,4$; mediana = 6,5; moda = 7; c. 9

a)

VOTO	3	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	9	10
FREQUENZA	1	2	1	2	1	3	2	4	1	3	1	1

b)

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 \cdot 2 + 4,5 + 5 \cdot 2 + 5,5 + 6 \cdot 3 + 6,5 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 7,5 + 8 \cdot 3 + 9 + 10}{22}$$

$$= \frac{140,5}{22} = \frac{281}{44} = 6,38... \approx 6,4$$

MODA = 7 (frequenza 4, maggiore)

3 4 4 4,5 5 5 5,5 6 6 6 6,5 6,5 7 7 7 7 7,5
 8 8 8 9 10

POSIZIONI CENTRALI
 ┌──────────┐
 ↓
 MEDIANA = $\frac{6,5 + 6,5}{2} = 6,5$

c)

$$\frac{\sum_{i=1}^{22} x_i}{22} = \frac{281}{44} \cdot 22 \Rightarrow \sum_{i=1}^{22} x_i = \frac{281}{2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{22} x_i + x_{23}}{23} = 6,5$$

$$\frac{\frac{281}{2} + x_{23}}{23} = 6,5$$

$$\frac{140,5 + x_{23}}{23} = 6,5$$

$$140,5 + x_{23} = 6,5 \cdot 23$$

$$x_{23} = 149,5 - 140,5 = 9$$

123 Una piccola azienda effettua un'indagine circa il numero dei figli dei propri dipendenti. I risultati sono riassunti nella tabella. Determina la media, la varianza e la deviazione standard del numero di figli dei dipendenti di quell'azienda.

Numero di figli	0	1	2	3	4
Numero di dipendenti	10	18	16	4	2

[Media = 1,4; $\sigma^2 = 1,04$; $\sigma \simeq 1,02$]

$$\bar{X} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 18 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{50} = \frac{70}{50} = 1,4$$

$$\sigma^2 = \frac{0^2 \cdot 10 + 1^2 \cdot 18 + 2^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 2}{50} - (1,4)^2 =$$

$$= \frac{150}{50} - 1,96 = 3 - 1,96 = 1,04$$

$$\sigma = \sqrt{1,04} = 1,0198 \dots \simeq 1,02$$

Prog. 402

284 Due numeri differiscono di 3. Trova i due numeri sapendo che la metà del maggiore supera di 2 un terzo del minore. [3; 6]

1° MODO (DELL'ANNO SCORSO)

$$x = 1^{\circ} \text{ numero}$$

$$x + 3 = 2^{\circ} \text{ numero}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{1}{3}x + 2$$

$$\frac{3(x+3)}{\cancel{6}} = \frac{2x+12}{\cancel{6}}$$

$$3x + 9 = 2x + 12$$

$$3x - 2x = 12 - 9 \Rightarrow x = 3 \quad 1^{\circ} \text{ numero}$$

$$x + 3 = 3 + 3 = 6 \quad 2^{\circ} \text{ numero}$$

2° MODO

$$x = 1^{\circ} \text{ numero}$$

$$y = 2^{\circ} \text{ numero}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{x}{2} = 2 + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

SISTEMA
(LINEARE)

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ \frac{3+y}{2} = 2 + \frac{1}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ \frac{3(3+y)}{\cancel{6}} = \frac{12 + 2y}{\cancel{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 9 + 3y = 12 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + y \\ 3y - 2y = 12 - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 3 = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

285 Due numeri interi differiscono di 4 e sono tali che la somma della metà e della quarta parte del maggiore supera di 2 la somma della metà e della quinta parte del minore. Trova i due numeri. [-20; -16]

$$x = 1^{\circ} \text{ numero} \quad y = 2^{\circ} \text{ numero}$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{5}y \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 2 + \frac{x-4}{2} + \frac{x-4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ \frac{10x + 5x}{20} = \frac{40 + 10(x-4) + 4(x-4)}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 15x = \cancel{40} + 10x - \cancel{40} + 4x - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 15x - 10x - 4x = -16 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 4 = -16 - 4 = -20 \\ x = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -16 \\ y = -20 \end{cases}$$