12/11/2020

219 $(2x-3)^2+(2x+1)^2=-3x^2-(x-2)^2$

$$4x^2+9-12x+4x^2+1+4x=-3x^2-(x^2+4-4x)$$

$$8x^2-8x+10+3x^2+(x^2+4-4x)=0$$

$$12x^2-12x+14=0$$

$$6x^2-6x+7=0 \qquad \Delta=(-6)^2-4\cdot6\cdot7=$$

$$=36-168=-132<0$$

IMPOSSIBILE IN $\mathbb{R}$

216 $x^2\underbrace{-(1+\sqrt{3})}_{b}x+\underbrace{2\sqrt{3}-6}_{c}=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(1+\sqrt{3})^2-4(2\sqrt{3}-6)=$$

$$=1+3+2\sqrt{3}-8\sqrt{3}+24=$$

$$=28-6\sqrt{3}=(1-3\sqrt{3})^2$$

PRODOTTO $=-3\sqrt{3}$

$$x=\frac{1+\sqrt{3}\pm(1-3\sqrt{3})}{2}=\begin{cases}\dfrac{\cancel{1}+\sqrt{3}-\cancel{1}+3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\\[2ex]\dfrac{1+\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}\end{cases}$$

$x=2\sqrt{3} \quad \vee \quad x=1-\sqrt{3}$

258 $\dfrac{1}{x^3+1}+\dfrac{x}{x^2-x+1}=\dfrac{2}{x+1}$ $\qquad \left[\dfrac{3\pm\sqrt5}{2}\right]$

$(x+1)(x^2-x+1)$ $\qquad$ C.E. $x \neq -1$

$$\frac{1+x(x+1)}{\cancel{(x+1)(x^2-x+1)}}=\frac{2(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)(x^2-x+1)}}$$

$$1+x^2+x=2x^2-2x+2$$

$$2x^2-x^2-2x-x+2-1=0$$

$$x^2-3x+1=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

OSSERVAZIONE

Le 2 soluzioni sono

$$x_1=\frac{3-\sqrt5}{2} \qquad x_2=\frac{3+\sqrt5}{2}$$

DICO CHE

$$x^2-3x+1=(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=\left(x-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt5}{2}\right)$$

VERIFICA

$$\left(x-\frac{3-\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt5}{2}\right)=x^2-\frac{3+\sqrt5}{2}x-\frac{3-\sqrt5}{2}x+\frac{(3-\sqrt5)(3+\sqrt5)}{4}=$$

$$=x^2-\frac{x}{2}\left(3+\cancel{\sqrt5}+3-\cancel{\sqrt5}\right)+\frac{9-5}{4}=\boxed{x^2-3x+1}$$

IN GENERALE $\qquad (a \neq 0)$

$$ax^2 + bx + c$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove x_1 e x_2 sono le 2 soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cioè $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

IN PARTICOLARE

$$\Delta = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

$$\left(x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}\right)$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$$a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}x + \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x^2 - \frac{x}{2a}\left(-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}\right) + \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a}x + \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}}\right) = ax^2 + bx + c$$

SCOMPORRE

513 $2x^2 + 3x - 5$ $[(x-1)(2x+5)]$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49 > 0$ ok, si può scomporre

Risolvo l'equazione $2x^2+3x-5=0$ e trovo le 2 soluzioni $\underbrace{x_1, x_2}$

SI CHIAMANO LE <u>RADICI</u> DEL POLINOMIO

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

$$2x^2+3x-5 = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1) =$$

$$= (2x+5)(x-1)$$

Si poteva scomporre col metodo SOMMA $= 3$, PRODOTTO $= 2 \cdot (-5) = -10$ $\Big\}$ 5, -2

$$2x^2+3x-5 = 2x^2-2x+5x-5 = 2x(x-1)+5(x-1) =$$

$$= (x-1)(2x+5)$$

Oppure ancora con Ruffini

$2x^2+3x-5$ DIVISORI DEL TERMINE NOTO ± 1 ± 5

$1 \mapsto 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 5 = 0$ OK

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 3 & -5 \\ 1 & & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & // \end{array}$$

$(2x+5)(x-1)$

517 $x^2 - 4x - 6$ $[(x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})]$

con questo polinomio i metodi di scomposizione dell'anno scorso falliscono

$$\frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot (-6) = 4 + 6 = 10$$

Trovo le 2 radici $x = 2 \pm \sqrt{10}$ $x_1 = 2 - \sqrt{10}$, $x_2 = 2 + \sqrt{10}$

$$x^2 - 4x - 6 \underset{a=1}{=} (x - (2 - \sqrt{10}))(x - (2 + \sqrt{10})) = (x - 2 + \sqrt{10})(x - 2 - \sqrt{10})$$

520 $x^2 + 4x + 5$ [Irriducibile in R]

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$$

IRRIDUCIBILE IN $\mathbb{R}$, CIOÈ NON SI PUÒ SCOMPORRE IN $\mathbb{R}$

Faccio vedere che $x^2 + 4x + 5 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, cioè qualsiasi numero che sostituisco alla x mi dà un risultato maggiore di 0:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = \underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se in ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ si trova $\Delta<0$,

tale trinomio <u>NON</u> è scomponibile in $\mathbb{R}$ (è IRRIDUCIBILE IN $\mathbb{R}$).

In più, se $a>0$, si ha che $ax^2+bx+c>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Somma e prodotto delle soluzioni

Verifica che ciascuna delle seguenti equazioni ammette soluzioni reali e calcola la somma s e il prodotto p delle soluzioni, senza risolvere l'equazione.

456 $x^2-3x-4=0$ $\quad [s=3,\ p=-4]$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25>0$ ok, 2 sol. reali distinte

SOMMA $=-\dfrac{b}{a}$ $\quad$ PRODOTTO $=\dfrac{c}{a}$ $\Rightarrow$ $S=-\dfrac{-3}{1}=3$ $\quad p=\dfrac{-4}{1}=-4$

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}=\frac{c}{a}$$

Si poteva vedere anche così

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2$$

$$=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

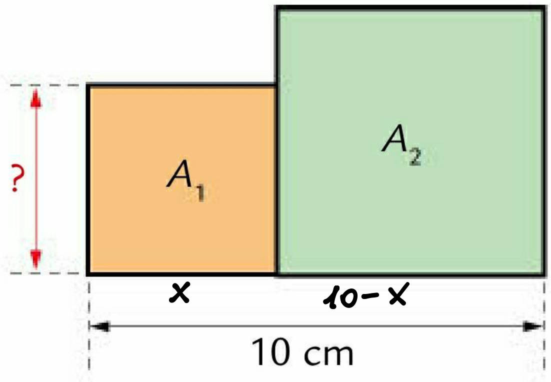
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

461 $\sqrt{2}\,x^2-2x-\sqrt{6}=0$ $\qquad [s=\sqrt{2},\ p=-\sqrt{3}]$

$$\Delta=4-4\sqrt{2}(-\sqrt{6})=4+4\sqrt{12}>0$$

$$s=-\frac{-2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \qquad p=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$$

695 L'area del quadrato verde nella figura è il doppio dell'area del quadrato arancione. Determina la lunghezza del lato del quadrato arancione.



$A_1 = \frac{1}{2} A_2$

[$10(\sqrt{2} - 1)$ cm]

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\mathcal{A}_2 \qquad\qquad 0 < x < 10$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(10 - x)^2$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(100 + x^2 - 20x)$$

$$2x^2 = 100 + x^2 - 20x$$

$$x^2 + 20x - 100 = 0 \qquad\qquad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = 100 - (-100)$$

$$= 200$$

$$\beta = 10$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta/4}}{a} = -10 \pm \sqrt{200} = -10 \pm 10\sqrt{2}$$

$$= \begin{cases} -10 - 10\sqrt{2} \quad N.A. \\ 10\sqrt{2} - 10 \\ = 10(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

$$\boxed{l_1 = 10(\sqrt{2} - 1)\ \text{cm}}$$

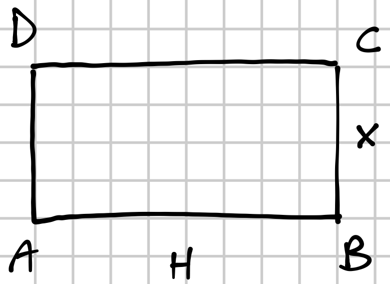
700 Un rettangolo $ABCD$ è tale che il lato AB supera di $3a$ il lato BC. Il rettangolo è equivalente a un rombo, avente la diagonale maggiore che supera di $2a$ la misura di AB e la diagonale minore che è inferiore di $7a$ alla misura del triplo di BC. Determina le misure di AB e BC.

$[\overline{AB} = 8a, \overline{BC} = 5a]$

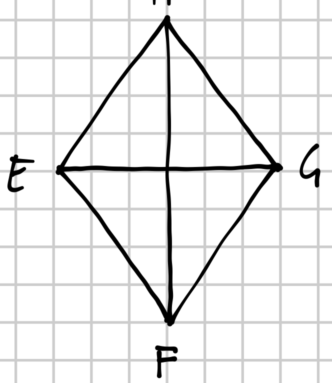
PARAMETRO

$a > 0$

(NON LO CONOSCO)



$\overline{AB} = \overline{BC} + 3a = x + 3a$



$\overline{HF} = 2a + \overline{AB} = 5a + \overline{BC} = 5a + x$

$\overline{EG} + 7a = 3\overline{BC} = 3x \Rightarrow \overline{EG} = 3x - 7a$

$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{EFGH}$ equazione da risolvere

$$x(x+3a) = \frac{1}{2} \cdot (3x-7a)(5a+x)$$

$$2x(x+3a) = (3x-7a)(5a+x)$$

$$2x^2 + 6ax = 15ax + 3x^2 - 35a^2 - 7ax$$

$$2x^2 - 3x^2 + 6ax + 7ax - 15ax + 35a^2 = 0$$

$$-x^2 - 2ax + 35a^2 = 0 \Rightarrow x^2 + \underbrace{2a}_{b}x \underbrace{- 35a^2}_{c} = 0$$

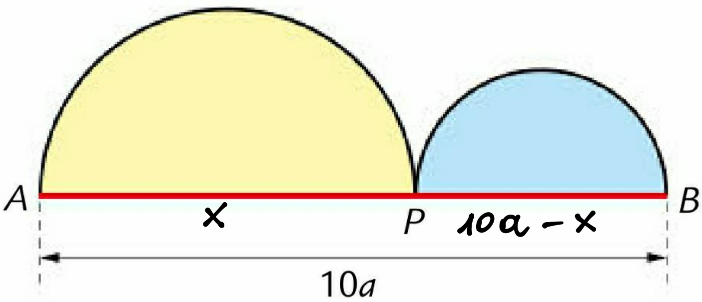
$$\Delta = 4a^2 + 140a^2 = 144a^2$$

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{144a^2}}{2} = \frac{-2a \pm 12a}{2} = \begin{cases} \frac{-14a}{2} = -7a \quad N.A. \\ \frac{10a}{2} = 5a \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{BC} = 5a \\ \overline{AB} = 8a \end{array}}$$

702 Determina il punto P, appartenente al segmento $\overline{AB} = 10a$, in modo che la somma delle aree dei semicerchi di diametri rispettivamente AP e PB sia $\frac{13}{2}\pi a^2$.

$a > 0$



$0 < x < 10a$

$[\overline{AP} = 4a \vee \overline{AP} = 6a]$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{x^2 \pi}{8} \qquad \mathcal{A}_2 = \frac{\left(\frac{10a - x}{2}\right)^2 \pi}{2} = \frac{(10a - x)^2 \pi}{8}$$

$$\frac{x^2 \cancel{\pi}}{8} + \frac{(10a - x)^2 \cancel{\pi}}{8} = \frac{13}{2} \cancel{\pi} a^2$$

$$x^2 + (10a - x)^2 = 52a^2$$

$$x^2 + 100a^2 + x^2 - 20ax - 52a^2 = 0$$

$$2x^2 - 20ax + 48a^2 = 0$$

$$x^2 \underbrace{- 10a}_{b} x + \underbrace{24a^2}_{c} = 0$$

$\beta = -5a$

$\frac{\Delta}{4} = 25a^2 - 24a^2 = a^2$

$$x = 5a \pm a = \begin{cases} 6a \\ 4a \end{cases}$$

$\overline{AP} = 6a \quad \vee \quad \overline{AP} = 4a$