24/11/2020

599 Considera l'equazione $kx^2 - 2(k+1)x + k + 2 = 0$. Dopo avere verificato che ammette soluzioni reali per ogni valore del parametro k, determina k in modo che:

a. la somma dei quadrati delle soluzioni sia 5;

b. la somma dei reciproci delle soluzioni sia 4. $\left[\mathbf{a.}\ k = -\frac{2}{3} \vee k = 2;\ \mathbf{b.}\ k = -3\right]$

$K = 0$ $\quad -2x + 2 = 0$ $\quad x = 1$ $\quad$ sì, ammette sol. reali

eq. 1° grado

$K \neq 0$ $\quad$ l'eq. è di 2° grado

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac = (k+1)^2 - k(k+2) =$

$a = K \quad \beta = -(k+1) \quad c = k+2$

$b = -2(k+1)$

$= \cancel{k^2} + \cancel{2k} + 1 - \cancel{k^2} - \cancel{2k} = 1 > 0$

$\frac{\Delta}{4} > 0$ per qualsiasi $K \neq 0$

- $x_1^2 + x_2^2 = 5$ $\qquad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\Downarrow$

$\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = 5 \Rightarrow \frac{4(k+1)^2}{k^2} - 2\frac{k+2}{k} = 5$ $\qquad$ C.E. $K \neq 0$

$$\frac{4(k^2+1+2k) - 2k(k+2)}{\cancel{k^2}} = \frac{5k^2}{\cancel{k^2}}$$

$4k^2 + 4 + 8k - 2k^2 - 4k = 5k^2$

$-3k^2 + 4k + 4 = 0$

$3k^2 - 4k - 4 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 + 12 = 16$

$k = \frac{2 \pm 4}{3} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{cases}$ $\qquad \boxed{k = -\frac{2}{3} \vee k = 2}$

b) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 4$

$\dfrac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 4 \qquad \dfrac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 4 \qquad -\dfrac{b}{\cancel{a}} \cdot \dfrac{\cancel{a}}{c} = 4 \qquad -\dfrac{b}{c} = 4$

$\Downarrow$

C.E.

$K \neq -2$

$-\dfrac{-2(K+1)}{K+2} = 4$

$\dfrac{\cancel{2}(K+1)}{K+2} = \cancel{4}^{\,2}$

$K + 1 = 2(K+2)$

$K + 1 = 2K + 4$

$-K = 3$

$\boxed{K = -3}$ dopo controllo C.E.

600 Data l'equazione $x^2 - 4x - k + 4 = 0$, determina per quali valori di k:

a. ammette soluzioni reali;

b. ammette soluzioni reali x_1 e x_2 tali che $x_1^3 + x_2^3 = 40$;

c. ammette soluzioni reali x_1 e x_2 tali che $x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -8$.

[**a.** $k \geq 0$; **b.** $k = 2$; **c.** $k = 7$]

a) $a = 1 \quad b = -4 \quad c = -k + 4$

$\beta = -2$

$\Delta \geq 0 \iff \frac{\Delta}{4} \geq 0$

$(-2)^2 - 1 \cdot (-k + 4) \geq 0$

$\cancel{4} + k - \cancel{4} \geq 0$

$\boxed{k \geq 0}$

b) $k \geq 0$

$x_1^3 + x_2^3 = 40$

$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3$

$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) =$

$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) =$

$= -\frac{b}{a}\Big(\underbrace{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}_{x_1^2 + x_2^2} - \frac{c}{a}\Big) =$

$= -\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2}$

$-\frac{b^3}{a^3} + 3\frac{bc}{a^2} = 40$

$64 - 12(-k + 4) = 40$

$12k - 48 = -24$

$12k = 24$

$\boxed{k = 2}$

c) $x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = -8$

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -8$$

$$(x_1 + x_2)(1 + x_1 x_2) = -8$$

$$-\frac{b}{a}\left(1 + \frac{c}{a}\right) = -8$$

$$-\frac{-4}{1}\left(1 + \frac{-k+4}{1}\right) = -8$$

$$\cancel{4}(5-k) = -\overset{-2}{\cancel{8}}$$

$$-k = -7$$

$$\boxed{k = 7}$$