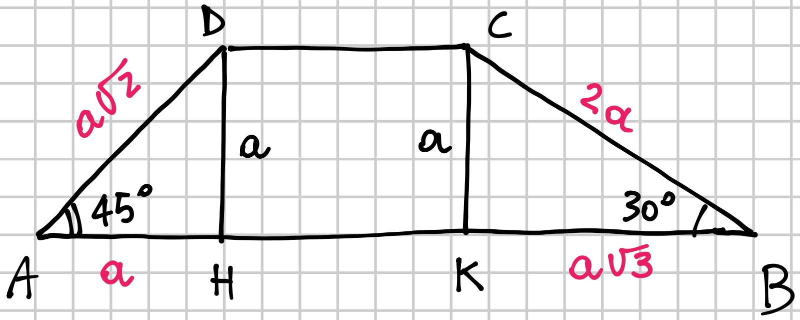
26/11/2020

47 In un trapezio $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 30° e 45°.
Sapendo che $\overline{AB} = (3+\sqrt{3})a$ e che l'altezza del trapezio misura a, determina il perimetro e l'area del trapezio.

$$\left[\text{Perimetro} = 7a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3};\ \text{Area} = \frac{(5+\sqrt{3})a^2}{2}\right]$$



$\overline{AB} = (3+\sqrt{3})a$

$\overline{DH} = a$

$2p = ?\quad \mathcal{A} = ?$

$$\overline{HK} = (3+\sqrt{3})a - a - a\sqrt{3} =$$

$$= 3a + \cancel{\sqrt{3}a} - a - \cancel{a\sqrt{3}} = 2a$$

$$2p = \underbrace{(3+\sqrt{3})a}_{\overline{AB}} + \underbrace{2a}_{\overline{BC}} + \underbrace{2a}_{\overline{DC}} + \underbrace{\sqrt{2}a}_{\overline{AD}} =$$

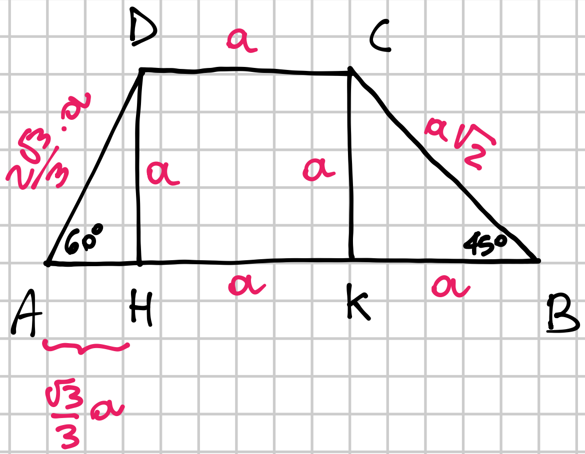
$$= 3a + a\sqrt{3} + 4a + a\sqrt{2} = \boxed{7a + a\sqrt{3} + a\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC})\cdot\overline{DH}}{2} = \frac{(3a + a\sqrt{3} + 2a)\cdot a}{2} = \frac{(5a + a\sqrt{3})\cdot a}{2} =$$

$$= \boxed{\frac{(5+\sqrt{3})a^2}{2}}$$

49 In un trapezio $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 60° e 45°. Sapendo che sia la base minore sia l'altezza misurano a, determina il perimetro e l'area del trapezio.

$$\left[\text{Perimetro} = 3a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3};\ \text{Area} = \frac{(9+\sqrt{3})a^2}{6}\right]$$



$$\overline{DH} = \overline{AD} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{AD} = \overline{DH} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$

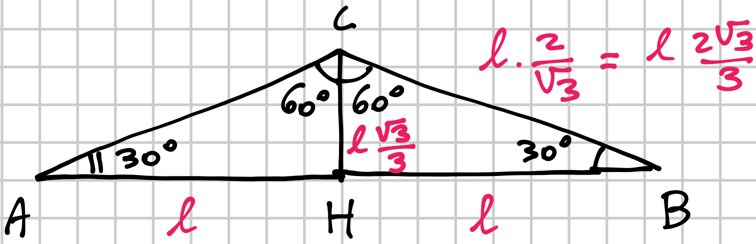
$$= \overline{DH} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$\overline{AB} = 2a + \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\mathcal{A} = \frac{\left(2a + \frac{\sqrt{3}}{3}a + a\right) \cdot a}{2} = \frac{\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)a^2}{2} = \frac{9+\sqrt{3}}{6}a^2$$

$$2p = 2a + \frac{\sqrt{3}}{3}a + a\sqrt{2} + a + \frac{2\sqrt{3}}{3}a = 3a + a\sqrt{3} + a\sqrt{2}$$

50 In un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *AB*, l'angolo $\widehat{C}$ è di 120°. Determina il perimetro e l'area del triangolo, sapendo che la base *AB* misura $2l$.
(*Suggerimento*: traccia l'altezza *CH* e osserva che i triangoli *AHC* e *BHC* sono rettangoli e hanno gli angoli acuti di 30° e 60°) $\left[\text{Perimetro} = 2l + \frac{4l\sqrt{3}}{3};\ \text{Area} = \frac{l^2}{3}\sqrt{3}\right]$



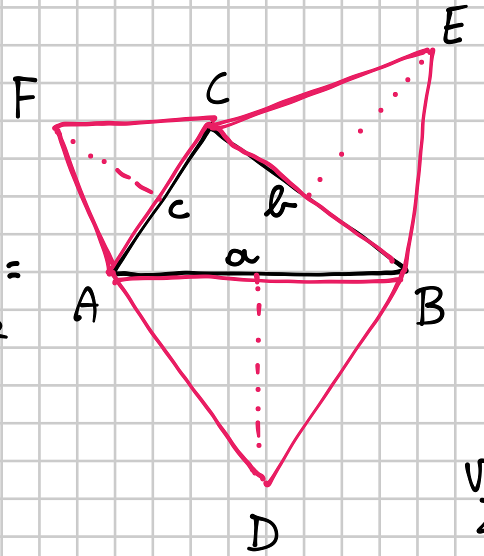
$l \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = l\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\cancel{2}}\,(\cancel{2}l)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\,l\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\,l^2$$

$$2p = 2l + 2\cdot l\,\frac{2\sqrt{3}}{3} = \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)l$$

OSSERVAZIONE

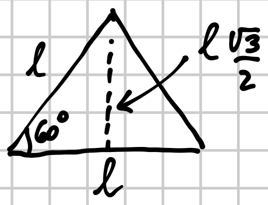
Il teorema di Pitagora vale lo stesso se sostituisco "QUADRATI" con "TRIANGOLI EQUILATERI"



Sappiamo che

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$\mathcal{A}_{\text{TR. EQUIL. DI LATO } l} =$
$= \frac{1}{2}\cdot l \cdot l\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$



$\mathcal{A}_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad \mathcal{A}_{BCE} = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$

$\mathcal{A}_{ACF} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$

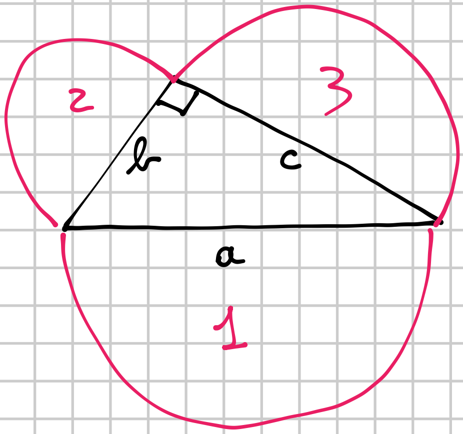
$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ sì perché vale

e poi moltiplico per $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\mathcal{A}_{\text{SEMICERCHIO}} = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi}{2} = \frac{\frac{d^2}{4}\pi}{2} = d^2\frac{\pi}{8}$$

$r = \frac{d}{2}$ ← DIAMETRO

RAGGIO

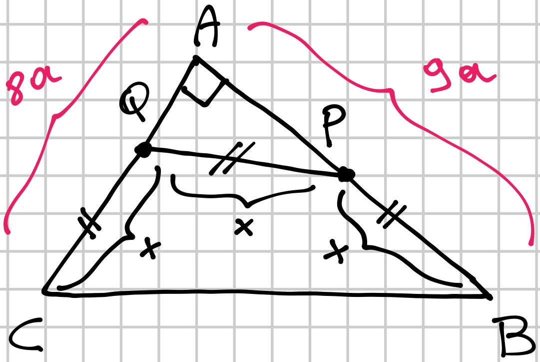


$a^2 = b^2 + c^2$ vale per TH. PITAGORA

$\Downarrow$ moltiplico per $\frac{\pi}{8}$

$$\underbrace{\frac{\pi}{8}a^2}_{\mathcal{A}_1} = \underbrace{\frac{\pi}{8}b^2}_{\mathcal{A}_2} + \underbrace{\frac{\pi}{8}c^2}_{\mathcal{A}_3}$$

118 In un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, risulta $\overline{AB} = 9a$ e $AC = 8a$. Determina un punto P sul cateto AB e un punto Q sul cateto AC, in modo che risulti $BP \cong PQ \cong QC$. [Posto $\overline{PB} = \overline{QC} = x$, si trova che $x = 5a$]



$0 < x < 8a$ C.E.

$$\overline{QP}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2$$

$$x^2 = (8a - x)^2 + (9a - x)^2$$

$\overline{AQ} = 8a - x$

$\overline{AP} = 9a - x$

$$\cancel{x^2} = 64a^2 + \cancel{x^2} - 16ax + 81a^2 + x^2 - 18ax$$

$$x^2 - 34ax + 145a^2 = 0$$

$\beta = -17a \qquad \frac{\Delta}{4} = 289a^2 - 145a^2 =$

$= 144a^2 = (12a)^2$

$x = 17a \pm 12a = \boxed{5a}$; $29a$ N.A.

OSSERVAZIONE IMPORTANTISSIMA

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$x = -5$ $\qquad \sqrt{(-5)^2} \neq -5$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

$$x \geq 0 \implies \sqrt{x^2} = x$$

$$x < 0 \implies \sqrt{x^2} = \underbrace{-x}_{\text{numero positivo}}$$

Ricordare che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se però ho un'espressione del tipo

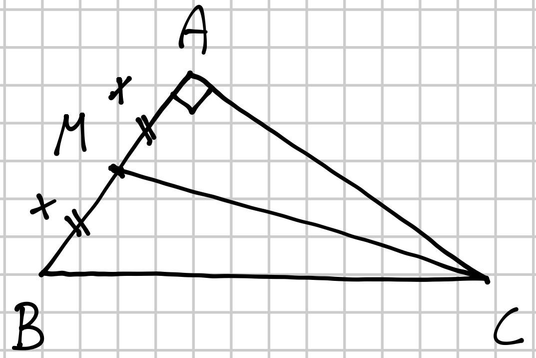
$$-5a \pm \sqrt{(12a)^2} = -5a \pm 12a$$

$$-5a - 12a = -17a$$

$$-5a + 12a = 7a$$

125 In un triangolo rettangolo ABC (non degenere), di ipotenusa BC, la mediana CM relativa ad AB misura 2 cm in meno di AB e 2 cm in più di AC. Determina il perimetro del triangolo. $[(20 + 4\sqrt{13})\ \text{cm}]$

$\overline{CM} = \overline{AB} - 2$ $\qquad \overline{CM} = \overline{AC} + 2$ $\qquad \overline{AB} = 2x$



$\overline{AM} = x$

$\overline{CM} = 2x - 2$

$\overline{AC} = \overline{CM} - 2 =$

$= 2x - 2 - 2 =$

$= 2x - 4$

AMC è rettangolo $\Rightarrow$ $\overline{CM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AC}^2$

$(2x-2)^2 = x^2 + (2x-4)^2$

$\cancel{4x^2} + 4 - 8x = x^2 + \cancel{4x^2} + 16 - 16x$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2 \lor x = 6$

$x = 2 \quad \overline{AB} = 4 \quad \overline{AC} = 0 \Rightarrow$ triangolo degenere

$x = 6 \quad \overline{AB} = 12 \quad \overline{AC} = 8 \quad \overline{BC} = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 64} =$

$= \sqrt{208} = \sqrt{2^4 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$

$2p = (12 + 8 + 4\sqrt{13})\ \text{cm} = (20 + 4\sqrt{13})\ \text{cm}$