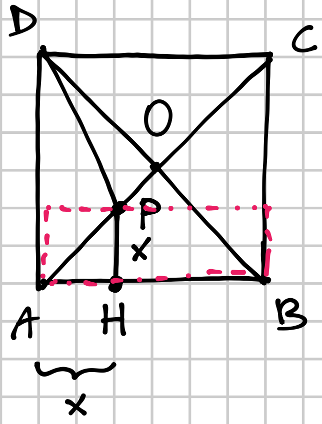
1/12/2020

122 Dato un quadrato *ABCD*, il cui lato *AB* misura $2a$, sia *O* il punto di intersezione delle sue diagonali. Determina un punto *P* sul segmento *AO*, in modo che detta *H* la proiezione di *P* su *AB*, la somma delle aree dei triangoli *POD* e *AHP* sia uguale all'area di un rettangolo avente la base congruente ad *AB* e l'altezza congruente ad *AH*.
(*Suggerimento*: poni $\overline{AH} = x$, con $0 \le x \le a$, ottieni l'equazione $x^2 - 6ax + 2a^2 = 0$) [Una soluzione: $x = (3 - \sqrt{7})a$]



$\overline{AB} = 2a$ $\qquad 0 \le x \le a$

$\overline{AH} = x \Rightarrow \overline{PH} = x$

$\overline{AP} = \sqrt{2}\,x$ $\qquad \overline{OP} = \overline{AO} - \overline{AP} =$

$= \sqrt{2}a - \sqrt{2}x$

$= \sqrt{2}(a - x)$

$\overline{AC} = 2\sqrt{2}\,a$

$\overline{AO} = \sqrt{2}\,a$

$\mathcal{A}_{AHP} = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad \mathcal{A}_{POD} = \frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{2}}(a-x)\cdot\cancel{\sqrt{2}}a$

$= a(a-x)$

$\mathcal{A}_{AHP} + \mathcal{A}_{POD} = 2ax$

$\frac{1}{2}x^2 + a(a-x) = 2ax$ $\qquad x^2 + 2a(a-x) - 4ax = 0$

$x^2 - 2ax - 4ax + 2a^2 = 0$

$x^2 - 6ax + 2a^2 = 0$

$\beta = -3a$ $\qquad \frac{\Delta}{4} = 9a^2 - 2a^2 = 7a^2$

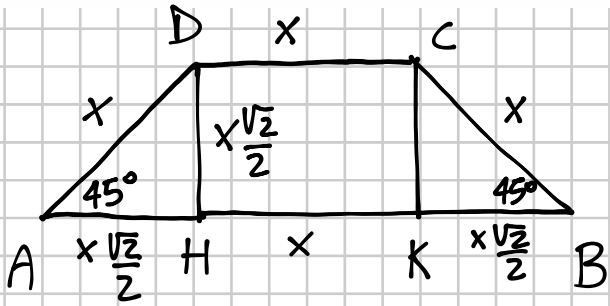
$x = 3a \pm \sqrt{7a^2} = 3a \pm \sqrt{7}\,a =$

$\overbrace{(3+\sqrt{7})}^{>1}\,a > a$ N.A.

$(3-\sqrt{7})\,a < a$ ok!

$$\boxed{\overline{AH} = (3-\sqrt{7})\,a}$$

135 In un trapezio isoscele *ABCD*, gli angoli adiacenti alla base maggiore *AB* sono di 45°. Sapendo che la base minore del trapezio è congruente ai lati obliqui e che il perimetro del trapezio è $(12 + 3\sqrt{2})$ cm, determina l'area. $\left[\frac{9(\sqrt{2}+1)}{2}\ \text{cm}^2\right]$



$$2p = 4x + \sqrt{2}x = (4+\sqrt{2})x$$

$$\Downarrow$$

$$(4+\sqrt{2})x = 12 + 3\sqrt{2}$$

$$\cancel{(4+\sqrt{2})}x = 3\cancel{(4+\sqrt{2})}$$

$$x = 3$$

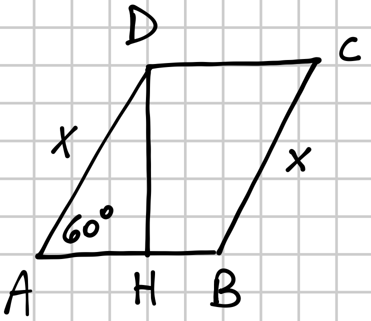
$$\overline{DC} = 3$$

$$\overline{AB} = 3 + 3\sqrt{2} \qquad \overline{DH} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = (3+3+3\sqrt{2})\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{(6+3\sqrt{2})3\sqrt{2}}{4} = \frac{18\sqrt{2}+18}{4} =$$

$$= \frac{\overset{9}{\cancel{18}}(\sqrt{2}+1)}{\cancel{4}_{2}} = \frac{9(\sqrt{2}+1)}{2}\ \text{cm}^2$$

136 I due angoli acuti di un parallelogramma $ABCD$ hanno ampiezza 60°. Inoltre il lato BC supera di 4 cm il lato AB. Sapendo che l'area del parallelogramma è $30\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, determina il perimetro del parallelogramma. [32 cm]



$$\overline{BC} = \overline{AB} + 4$$

$$\mathcal{A} = 30\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = x \qquad \overline{DH} = x\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \overline{AB} = x - 4$$

$$\mathcal{A} = (x-4)\, x\frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

$$x(x-4)\cdot\cancel{\sqrt{3}} = 60\cancel{\sqrt{3}}$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0$$

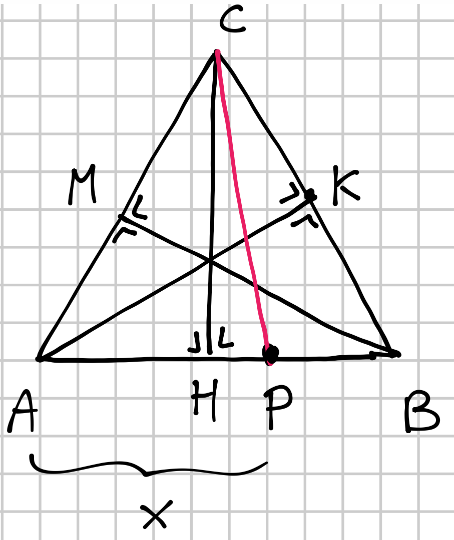
$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 60 = 64$$

$$x = 2 \pm 8 = \begin{cases} -6 \text{ N.A.} \\ 10 \end{cases}$$

$$\overline{BC} = 10 \qquad \overline{AB} = 10 - 4 = 6$$

$$2p_{ABCD} = (10 + 6)\cdot 2 = 32 \text{ cm}$$

141 In un triangolo equilatero ABC, le mediane misurano $l\sqrt{3}$. Stabilisci quanto misura il lato del triangolo e determina un punto P, sul lato AB, in modo che risulti $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{29}{8}l^2$. $\left[\text{Posto } \overline{PA} = x, \text{ si trova } x = \frac{l}{4} \vee x = \frac{3}{4}l\right]$



$\overline{CH} = l\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $\overline{AB} = 2l$

$\overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}$

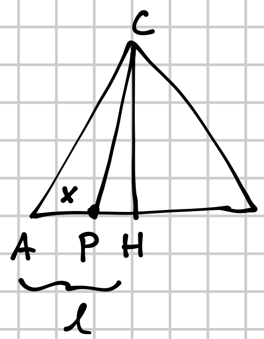
$\Downarrow$

$\overline{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{CH} = \frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot l\cancel{\sqrt{3}} = 2l$

$\overline{PA} = x \quad\quad 0 < x < 2l$

$\overline{HP} = x - \underbrace{\overline{AH}}_{l} = x - l$

Se fosse



$\overline{HP} = l - x$

$\overline{PC}^2 = \overline{HP}^2 + \overline{CH}^2 = (x-l)^2 + 3l^2$

$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{29}{8}l^2$ equazione da risolvere

$x^2 + (x-l)^2 + 3l^2 = \frac{29}{8}l^2$

$x^2 + x^2 + l^2 - 2lx + 3l^2 - \frac{29}{8}l^2 = 0$

$2x^2 - 2lx + \frac{3}{8}l^2 = 0 \quad\quad 16x^2 - 16lx + 3l^2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 64l^2 - 48l^2 = 16l^2 \quad\quad x = \frac{8l \pm 4l}{16} = \begin{cases} \frac{4}{16}l = \frac{1}{4}l \\ \frac{12}{16}l = \frac{3}{4}l \end{cases}$

$\beta = -8l$

$\boxed{x = \frac{1}{4}l \vee x = \frac{3}{4}l}$