17/12/2020

7

$$\begin{cases} \textcircled{1}\ \dfrac{1-2x}{3} > \left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2 \\ \textcircled{2}\ \dfrac{2-3x}{x} \geq 1 \\ \textcircled{3}\ \dfrac{x-3}{6} + \dfrac{2-x}{4} < 0 \end{cases}$$

① $\dfrac{1-2x}{3} > \dfrac{1}{4} + x^2 - x$

$$\frac{1-2x}{3} - \frac{1}{4} - x^2 + x > 0$$

$$\frac{4-8x-3-12x^2+12x}{\cancel{12}} > 0$$

$$-12x^2+4x+1 > 0$$

$$12x^2-4x-1 < 0$$

$S = -4 \qquad x_1 = -6$

$P = -12 \qquad x_2 = +2$

$$12x^2-6x+2x-1 < 0$$

$$6x(2x-1)+(2x-1) < 0 \qquad \underbrace{(2x-1)}_{N_1}\underbrace{(6x+1)}_{N_2} < 0$$

$N_1 > 0 \quad 2x-1 > 0 \quad x > \frac{1}{2}$

$N_2 > 0 \quad 6x+1 > 0 \quad x > -\frac{1}{6}$

$$\boxed{-\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}}$$

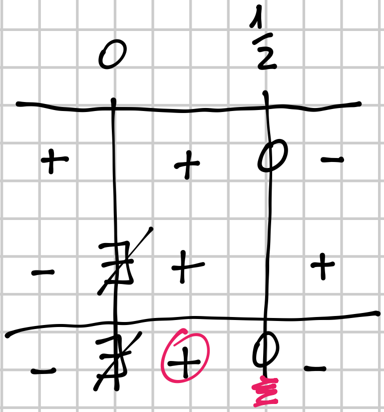
		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	
N_1	−		−	0	+
N_2	−	0	+		+
	+	0	−	0	+

(2) $\dfrac{2-3x}{x} \geq 1$ $\qquad \dfrac{2-3x}{x} - 1 \geq 0$ $\qquad \dfrac{2-3x-x}{x} \geq 0$

$$\frac{2-4x}{x} \geq 0 \qquad \begin{matrix} N \\ D \end{matrix}$$

$N > 0 \qquad 2-4x > 0 \qquad -4x > -2 \qquad 4x < 2 \qquad x < \frac{1}{2}$

$D > 0 \qquad x > 0$



$$\boxed{0 < x \leq \frac{1}{2}}$$

(3) $\dfrac{x-3}{6} + \dfrac{2-x}{4} < 0$

$$\frac{2x - \cancel{6} + \cancel{6} - 3x}{12} < 0 \qquad -\frac{x}{\cancel{12}} < 0 \qquad -x < 0$$

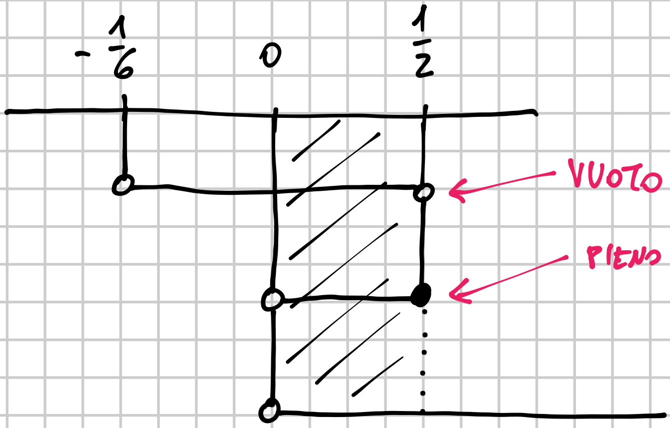
$$\Downarrow$$

$$\boxed{x > 0}$$

(1) $-\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$

(2) $0 < x \leq \frac{1}{2}$

(3) $x > 0$



|| "VINCE" IL VUOTO

(nell'intersezione $\frac{1}{2}$ non c'è, perché non è elemento di tutti e 3 gli insiemi, ma solo di due)

$$\boxed{0 < x < \frac{1}{2}}$$

283 Sia x un numero reale. Per quali valori di x il doppio del reciproco di x è almeno uguale a 10?

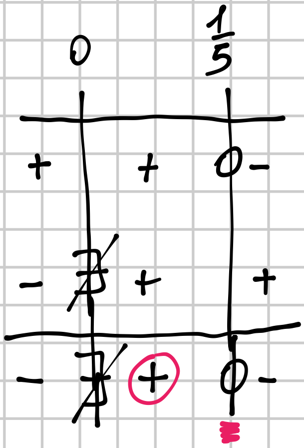
$$\left[0 < x \leq \frac{1}{5}\right]$$

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad \underbrace{2 \cdot \frac{1}{x}}_{\text{DOPPIO DEL RECIPROCO DI } x} \geq 10 \implies \frac{2}{x} \geq 10$

$$\frac{2}{x} - 10 \geq 0 \qquad \frac{2-10x}{x} \geq 0 \quad \begin{matrix} N \\ D \end{matrix}$$

$N > 0 \quad 2-10x > 0 \quad -10x > -2 \quad 10x < 2 \quad x < \frac{1}{5}$

$D > 0 \quad x > 0$



$$\boxed{0 < x \leq \frac{1}{5}}$$

285 Sia x un numero reale. Il reciproco del numero che si ottiene aumentando x di 1 è uguale al massimo a 5. Quali valori può assumere x? $\left[x < -1 \vee x \geq -\frac{4}{5}\right]$

$$\frac{1}{x+1} \leq 5 \qquad \frac{1}{x+1} - 5 \leq 0$$

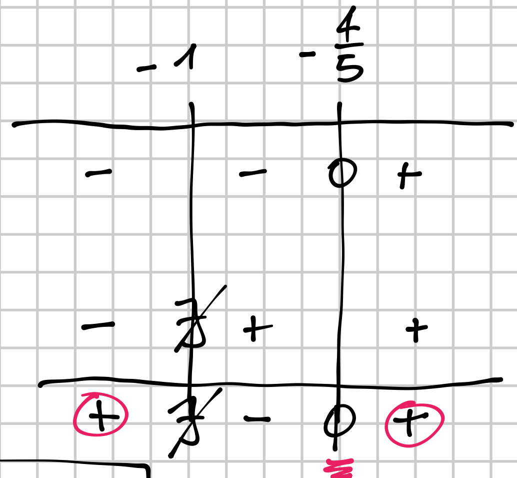
$$\frac{1-5x-5}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{-4-5x}{x+1} \leq 0$$

$$\begin{matrix} \boxed{N} \\ \boxed{D} \end{matrix} \; \frac{5x+4}{x+1} \geq 0$$

$N > 0 \quad 5x+4 > 0 \quad 5x > -4 \quad x > -\frac{4}{5}$

$D > 0 \quad x+1 > 0 \quad x > -1$



$$\boxed{x < -1 \quad \vee \quad x \geq -\frac{4}{5}}$$

287 Il professore rivolge a Paolo la domanda «Quali numeri reali sono tali che il loro quadrato è maggiore del loro reciproco?». Paolo risponde «gli stessi che sono più grandi del loro reciproco». Ha ragione?

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad x^2 > \frac{1}{x}$ $\qquad$ QUELLO CHE CHIEDE IL PROFESSORE

RISPOSTA DI PAOLO: $\quad x \in \mathbb{R} \qquad x > \frac{1}{x}$

Paolo ha ragione se le due disequazioni hanno gli stessi insiemi soluzione (sono equivalenti).

Ma se prendo $\boxed{x=-2}$ ho che

CONTROESEMPIO

$x^2 > \frac{1}{x} \qquad\qquad x > \frac{1}{x}$

$(-2)^2 > -\frac{1}{2} \qquad\qquad -2 > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ quindi la risposta è scorretta

$4 > -\frac{1}{2}$ $\qquad$ FALSO

VERO

1) $x^2 > \frac{1}{x} \qquad x^2 - \frac{1}{x} > 0 \qquad \frac{x^3-1}{x} > 0 \quad$ (N, D)

$N > 0 \qquad x^3 - 1 > 0 \qquad x^3 > 1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} x > 1$

$D > 0 \qquad x > 0$

		0		1	
N	$-$		$-$	0	$+$
D	$-$	$\nexists$	$+$		$+$
	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$\boxed{x < 0 \ \vee \ x > 1}$$

2) $x > \frac{1}{x}$ $\qquad x - \frac{1}{x} > 0$ $\qquad \frac{x^2-1}{x} > 0$

$$\frac{\overset{N_1}{(x-1)}\,\overset{N_2}{(x+1)}}{\underset{D}{x}} > 0$$

$N_1 > 0 \quad x-1>0 \quad x>1$

$N_2 > 0 \quad x+1>0 \quad x>-1$

$D > 0 \quad x>0$

	-1		0		1	
$-$		$-$		$-$	0	$+$
$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-$		$-$	$\nexists$	$+$		$+$
$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

$$\boxed{-1 < x < 0 \quad \vee \quad x > 1}$$

Gli insiemi soluzione delle due disequazioni sono diversi, quindi la risposta di Paolo è sbagliata.

Se però il professore avesse detto che x è positivo, la risposta sarebbe stata corretta

$$\begin{cases} x^2 > \frac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases} \qquad \qquad \begin{cases} x > \frac{1}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

PROFESSORE $\qquad$ SISTEMI EQUIVALENTI (STESSO INS. SOLUZIONE $\boxed{x>1}$) $\qquad$ PAOLO

(*) Vediamo che $x^3 > 1 \iff x > 1$

$$x^3 > 1$$

$$x^3 - 1 > 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) > 0$$

$$(x-1)\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1\right) > 0$$

$$(x-1)\left[\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right)\right] > 0$$

$$(x-1)\Bigg[\underbrace{\underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{\text{QUADRATO}} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{POSITIVO}}}_{>0}\Bigg] > 0$$

POSITIVO $\forall x \in \mathbb{R}$ non influenza il segno del I membro

$$\Downarrow$$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$