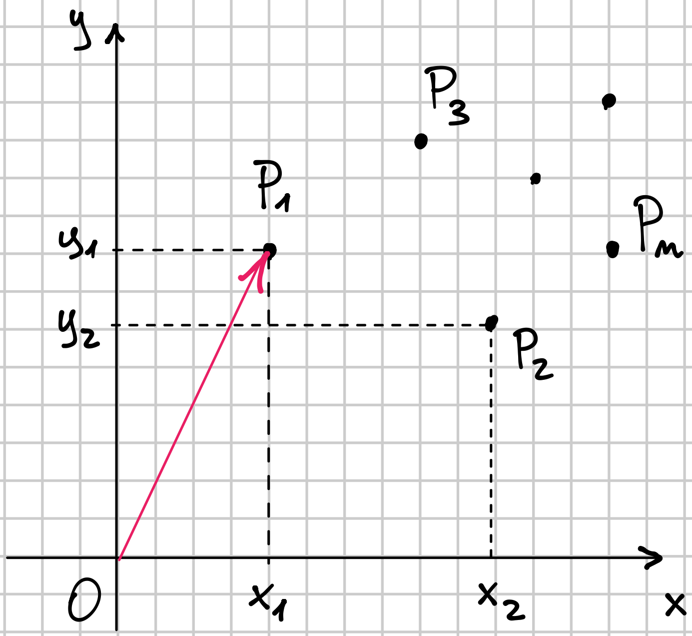
12/12/2020

# CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI (NEL PIANO)




Ad ogni punto $P_i$ $\quad i = 1, \dots, n$ è associata la sua massa $m_i$

$(P_1, m_1)$
$(P_2, m_2)$
$\vdots$
$(P_n, m_n)$

VETTORE POSIZIONE DI $P_1$ È $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$

$C_M$ = CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA

Il vettore posizione del centro di massa $C_M$ è $\overrightarrow{OC_M} = (x_{C_M}, y_{C_M})$

$$\begin{cases} x_{C_M} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_{C_M} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{cases}$$

Più semplicemente

| | vettori posizione |
|---|---|
| $(P_1, m_1)$ | $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ |
| $(P_2, m_2)$ | $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(P_n, m_n)$ | $\vec{r}_n = \overrightarrow{OP_n}$ |

$$\boxed{\vec{r}_{C_M} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}$$

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1) \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2) \quad \dots \quad \vec{r}_n = (x_n, y_n)$

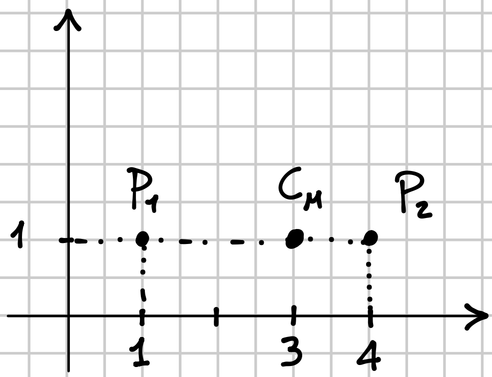
ESEMPIO

$P_1\ (1,1) \quad m_1 = 2\ kg$

$P_2\ (4,1) \quad m_2 = 4\ kg$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{2+4} = 3$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2+4} = 1$$




PICCOLA OSSERVAZIONE SULLA MEDIA PESATA

VOTI: 5 6 7

$$\text{MEDIA ARITMETICA} = \frac{5+6+7}{3} = 6$$

VOTI PESATI

| 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|
| 60% | 20% | 20% |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 0,6 | 0,2 | 0,2 |

$$\text{MEDIA PESATA} = \frac{0{,}6 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}2 \cdot 7}{0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}2} = 5{,}6$$

↓ è come se avessi 100 voti e ne facessi la media aritm.

$$\frac{60 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 7}{100}$$

# PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA

Per semplicità mi concentro su un sistema formato da 2 punti (ciò che diremo vale in generale per n punti)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad \text{POSIZIONE DEL } C_M$$

## VELOCITÀ DI $C_M$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{CM}(t+\Delta t) - \vec{r}_{CM}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1\vec{r}_1(t+\Delta t) + m_2\vec{r}_2(t+\Delta t)}{m_1+m_2} - \dfrac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\dfrac{m_1\left[\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right] + m_2\left[\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)\right]}{m_1+m_2}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{m_1\left[\dfrac{\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t}\right] + m_2\left[\dfrac{\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t}\right]}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} =$$ la velocità di $C_M$ è la media pesata delle velocità dei punti

$$= \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}$$ ← QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}}$$

Sempre partendo dai principi della dinamica, si dimostra che la velocità $\vec{v}_{cm}$ con cui si muove il centro di massa è data dalla formula

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{tot}}{m_{tot}}, \qquad [19]$$

in cui $m_{tot}$ è la massa complessiva del sistema e $\vec{p}_{tot}$ è la quantità di moto totale.

$$\boxed{\vec{p}_{TOT} = m_{TOT}\ \vec{v}_{CM}}$$

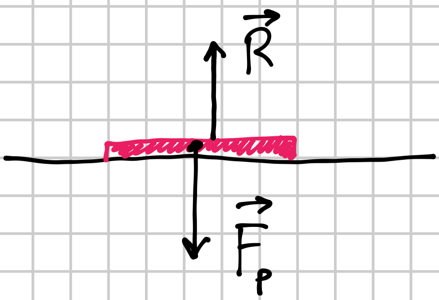
SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA, $\vec{p}_{TOT}$ SI CONSERVA (CIOÈ È COSTANTE), QUINDI $\vec{v}_{CM}$ È COSTANTE (SE $m_{TOT}$ RIMANE COSTANTE) E IL $C_M$ SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

LE FORZE INTERNE NON CAMBIANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA (SOLO LE FORZE ESTERNE POSSONO FARLO)

CHIAVE INGLESE LANCIATA SU UN TAVOLO (VISTA DALL'ALTO)

R. Mengo/Fundamental Photographs

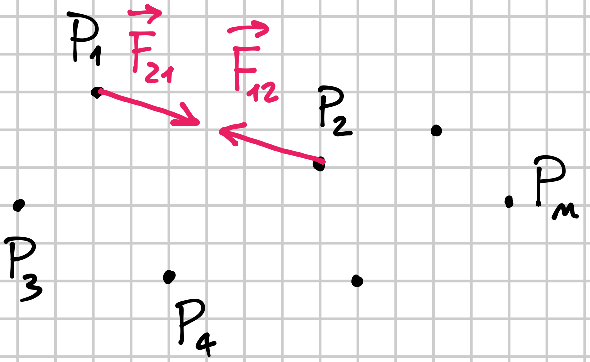
TRASCURANDO L'ATTRITO, LE FORZE ESTERNE SONO IL PESO $\vec{F}_p$ E LA REAZIONE VINCOLARE $\vec{R}$ DEL PIANO DI APPOGGIO. SI HA




$$\vec{F}_p + \vec{R} = \vec{0}$$

## PUNTUALIZZAZIONE: FORZE INTERNE ED ESTERNE

$\underbrace{\text{FORZE INTERNE}}$ → FORZE CON CUI PUNTI DEL SISTEMA AGISCONO SU ALTRI PUNTI DEL SISTEMA




### FORZE INTERNE

$\vec F_{12}$ = forza con cui $P_1$ agisce su $P_2$

$\vec F_{21}$ = forza con cui $P_2$ agisce su $P_1$

per il 3° principio della dinamica $\vec F_{21} = -\vec F_{12}$

$\Rightarrow \underbrace{\sum}_{\text{SOMMA}} \vec F_{INT} = \vec 0$ La somma di tutte le forze interne è $\vec 0$

## ACCELERAZIONE DEL $C_M$

$$\vec a_{CM} = \frac{\Delta \vec v_{CM}}{\Delta t} = \dots = \frac{m_1 \frac{\Delta \vec v_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec v_2}{\Delta t}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec a_1 + m_2 \vec a_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{m_{TOT}}}$$

$$m_{TOT} \vec a_{CM} = \underbrace{\overbrace{m_1 \vec a_1}^{\vec F_1 \text{ (forza su } P_1)} + \overbrace{m_2 \vec a_2}^{\vec F_2 \text{ (forza su } P_2)}}_{\text{FORZA TOTALE}} =$$

$$= \underbrace{\sum \vec F_{INT}}_{\vec 0} + \sum \vec F_{EST} = \sum \vec F_{EST}$$

il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema ed è sottoposto a una forza uguale alla forza esterna risultante che agisce sul sistema.

DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI PAG. 439

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}}{m_1 + m_2}$$

$$m_{TOT} \vec{a}_{CM} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \frac{m_1 \Delta \vec{v}_1 + m^2 \Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{TOT} \Delta t = \Delta \vec{p}_{TOT}}$$