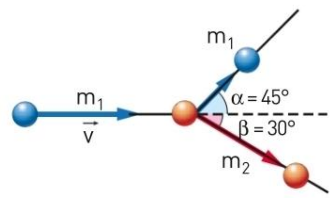
15/12/2020

1 QUESITO

IN UN'ORA

Su un biliardo una palla di massa $m_1 = 0{,}500$ kg e velocità $v = 4{,}70$ m/s urta una seconda palla di massa $m_2 = 0{,}366$ kg che era ferma. Come è mostrato nella figura, nell'urto la biglia di massa m_1 viene deviata di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto alla sua direzione iniziale. L'altra è spinta a formare un angolo $\beta = 30°$ con la direzione iniziale ma, rispetto a essa, si muove nel semipiano opposto a quello in cui si trova la prima palla. Indichiamo con $\vec{v}_1$ la velocità della palla m_1 dopo l'urto, e con $\vec{v}_2$ la velocità finale dell'altra palla.



a. Scomponi le due velocità nelle loro componenti orizzontali (con riferimento alla figura precedente) e verticali.

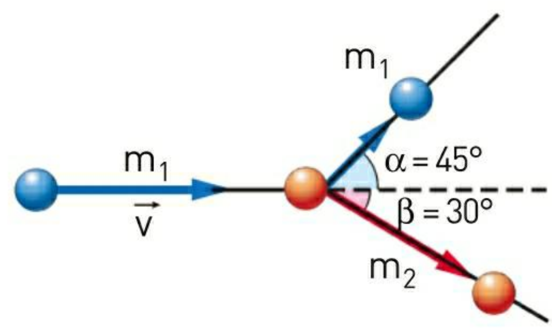
b. Quale relazione lega tra di loro le due componenti verticali? Scrivi tale relazione e grazie a essa ricava il modulo di una delle velocità in funzione dell'altra.

c. Quale relazione lega tra di loro le due componenti orizzontali e la velocità iniziale di m_1? Scrivi questa relazione e grazie a essa ricava il modulo di una delle due velocità finali.

d. A questo punto si è in grado di trovare il modulo dell'altra velocità finale.

e. Calcola l'energia cinetica totale prima e dopo l'urto del sistema formato dalle due palline. L'urto è elastico?

[$v_1 = 2{,}43$ m/s, $v_2 = 4{,}70$ m/s; 5,52 J, 5,52 J]



$$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$$

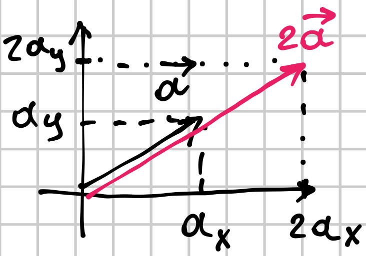
$$\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$$

$$\vec{v} = (v_x, \underbrace{v_y}_{0}) = (v_x, 0)$$

TH. CONS. QUANTITÀ MOTO $\quad \vec{P}_{IN} = \vec{P}_{FIN}$

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$m_1 (v_x, v_y) = m_1 (v_{1x}, v_{1y}) + m_2 (v_{2x}, v_{2y})$$

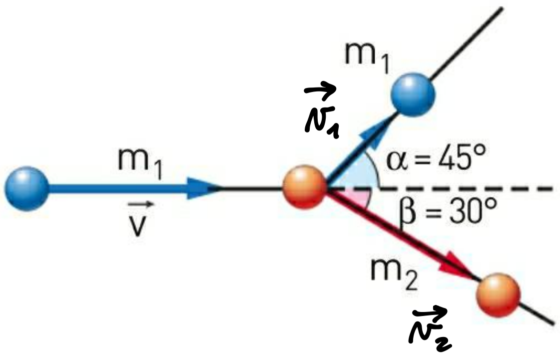


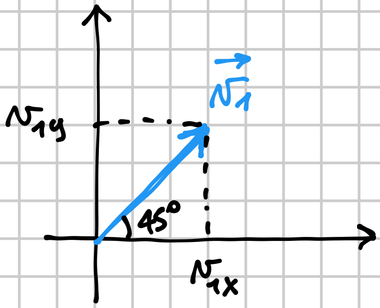
$$(m_1 v_x, \underbrace{m_1 v_y}_{0}) = (m_1 v_{1x}, m_1 v_{1y}) + (m_2 v_{2x}, m_2 v_{2y})$$

$$= (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}, m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y})$$

$$\begin{cases} m_1 v_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ 0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \\ 0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} \end{cases}$$

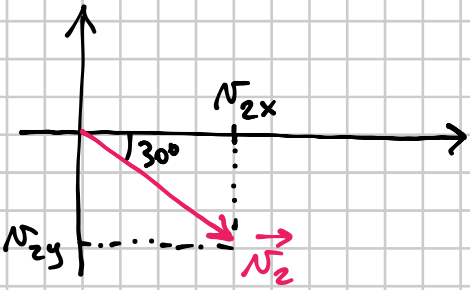




$$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$$

$$v_{1x} = v_1 \cos 45° = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_{1y} = v_1 \sin 45° = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y})$$

$$v_{2x} = v_2 \cos 30° = v_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{2y} = -v_2 \sin 30° = -v_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} m_1 v_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + m_2 v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - m_2 \frac{v_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + m_2 v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = m_1 v_x \\ m_1 v_1 \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = m_2 \frac{v_2}{\cancel{2}} \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{2}\, v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\cancel{m_1}\sqrt{2}}{2} v_1 + \frac{\cancel{m_1}\sqrt{6}}{2} v_1 = \cancel{m_1} v_x \\ v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{2}\, v_1 \end{cases}$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{6})\, v_1 = 2 v_x \Rightarrow v_1 = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} v_x$$

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} v_x \Rightarrow v_{1x} = v_{1y} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} v_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \left(4{,}70\ \frac{m}{s}\right) = 1{,}72031\ldots\ \frac{m}{s}$$

$$\simeq \boxed{1{,}72\ \frac{m}{s}}$$

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \left(4{,}70\ \frac{m}{s}\right) = 2{,}4328\ldots\ \frac{m}{s}$$

$$\simeq \boxed{2{,}43\ \frac{m}{s}}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{2}\, v_1 = \frac{0{,}500\ kg}{0{,}366\ kg} \sqrt{2}\ \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \left(4{,}70\ \frac{m}{s}\right) =$$

$$= 4{,}70032\ldots\ \frac{m}{s} \simeq \boxed{4{,}70\ \frac{m}{s}}$$

$$v_{2x} = v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong \boxed{4{,}07\ \frac{m}{s}}$$

$$v_{2y} = -v_2 \cdot \frac{1}{2} \cong \boxed{-2{,}35\ \frac{m}{s}}$$

b)

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0 \Rightarrow v_{1y} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2y}$$

$$\Downarrow$$

$$v_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{m_2}{m_1} v_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{v_1 = \frac{m_2}{m_1\sqrt{2}} v_2}$$

c) $m_1 \underbrace{v_x}_{v} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$

$$\Downarrow$$

$$m_1 v = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$v_{1x} = v_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_{2x} = v_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m_1 v = m_1 \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 + m_2 \frac{\sqrt{3}}{2} v_2$$

$$m_1 \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 = m_1 v - m_2 \frac{\sqrt{3}}{2} v_2$$

$$v_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} v - \frac{m_2}{m_1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v_2$$

$$v_1 = \sqrt{2}\, v - \frac{m_2}{m_1} \frac{\sqrt{6}}{2} v_2$$

d) GIÀ FATTO

e) $K_{IN} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} (0{,}500 \text{ kg}) \left(4{,}70 \frac{m}{s}\right)^2 =$

$= 5{,}5225 \text{ J} \simeq \boxed{5{,}52 \text{ J}}$

$K_{FIN} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (0{,}500 \text{ kg}) \left(2{,}4328\ldots \frac{m}{s}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{2} (0{,}366 \text{ kg}) \left(4{,}70032\ldots \frac{m}{s}\right)^2 = 5{,}5226\ldots \text{ J}$

$\simeq \boxed{5{,}52 \text{ J}}$

Essendo l'en. cinetica finale praticamente uguale a quella iniziale, possiamo considerare l'urto ELASTICO