29/9/2020

91 Considera la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + ax}{x^2 + b},$$

con a e b costanti reali.

a. Determina a e b in modo che i punti di coordinate $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-2; \frac{8}{5}\right)$ appartengano al grafico di $f(x)$.

b. Assegnati ad a e b i valori trovati, determina il dominio e l'insieme immagine di $f(x)$.

c. Osservando che la funzione può essere riscritta, per $x \neq 0$, come $f(x) = \frac{1 + \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x^2}}$, cosa puoi dedurre riguardo al comportamento della funzione per valori molto grandi di x? Utilizza anche questa osservazione per tracciare un grafico probabile di $f(x)$.

[a) $a = -2$, $b = 1$; b) D_f: $\mathbb{R}$, $Im(f)$: $-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; c) il grafico della funzione tende alla retta $y = 1$]

a) $\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1+a}{1+b} \\ \frac{8}{5} = \frac{4-2a}{4+b} \end{cases}$ $\begin{cases} -1-b = 2+2a \\ 32+8b = 20-10a \end{cases}$ $\begin{cases} b = -3-2a \\ 32+8(-3-2a) = \\ = 20-10a \end{cases}$

$32 - 24 - 16a = 20 - 10a$ $\quad -6a = 12$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = -3+4 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2+1}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$y = \frac{x^2-2x}{x^2+1}$

$\downarrow$

Sia $c \in \mathbb{R}$, cerchiamo di vedere per quali c esiste $x \in D$ tale che $f(x) = c$

$c = \frac{x^2-2x}{x^2+1}$ $\quad c(x^2+1) = x^2-2x$

$cx^2 + c = x^2 - 2x$

$cx^2 - x^2 + 2x + c = 0$

$(c-1)x^2 + 2x + c = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - c(c-1)}}{c-1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-c^2+c}}{c-1}$

$1 - c^2 + c \geq 0$

$c^2 - c - 1 \leq 0$

$c = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\qquad \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \leq c \leq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

L'insieme immagine è $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = J$

- 1 ha una sola controimmagine
- tutti gli altri punti dell'intervallo J hanno due controimmagini (in realtà $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hanno controimmagini coincidenti)

c)

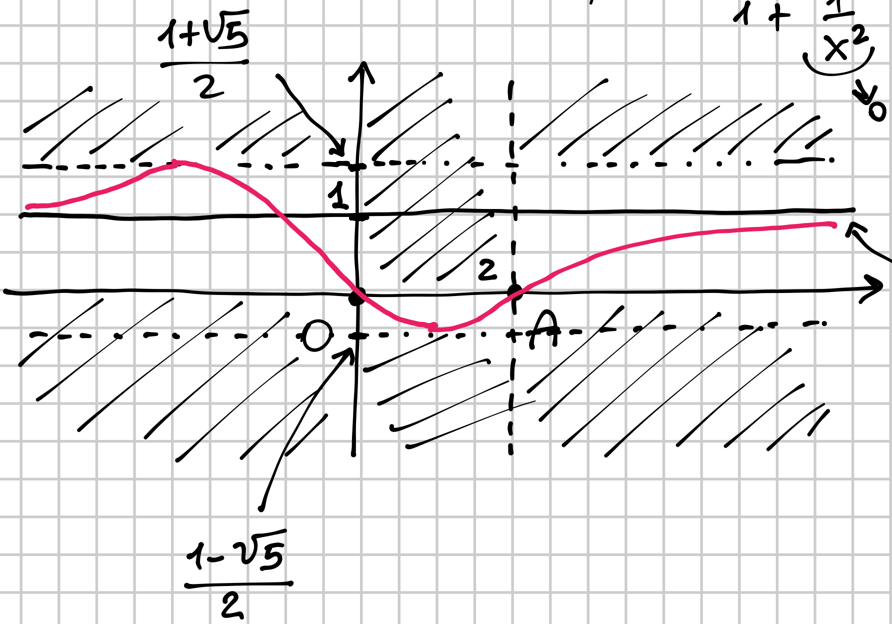
$\forall x \neq 0 \qquad f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2+1} = \dfrac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$

Per $|x|$ "molto grande" come si comporta $f(x)$?

$\frac{2}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendono a 0, cioè "si avvicinano" a 0,

quindi $f(x)$ tende a 1

$$f(x) = \frac{1 - \overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} \to 1 \quad \text{per } x \to \pm\infty$$



ASINTOTO ORIZZONTALE DI f per $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{1 + x^2}$$

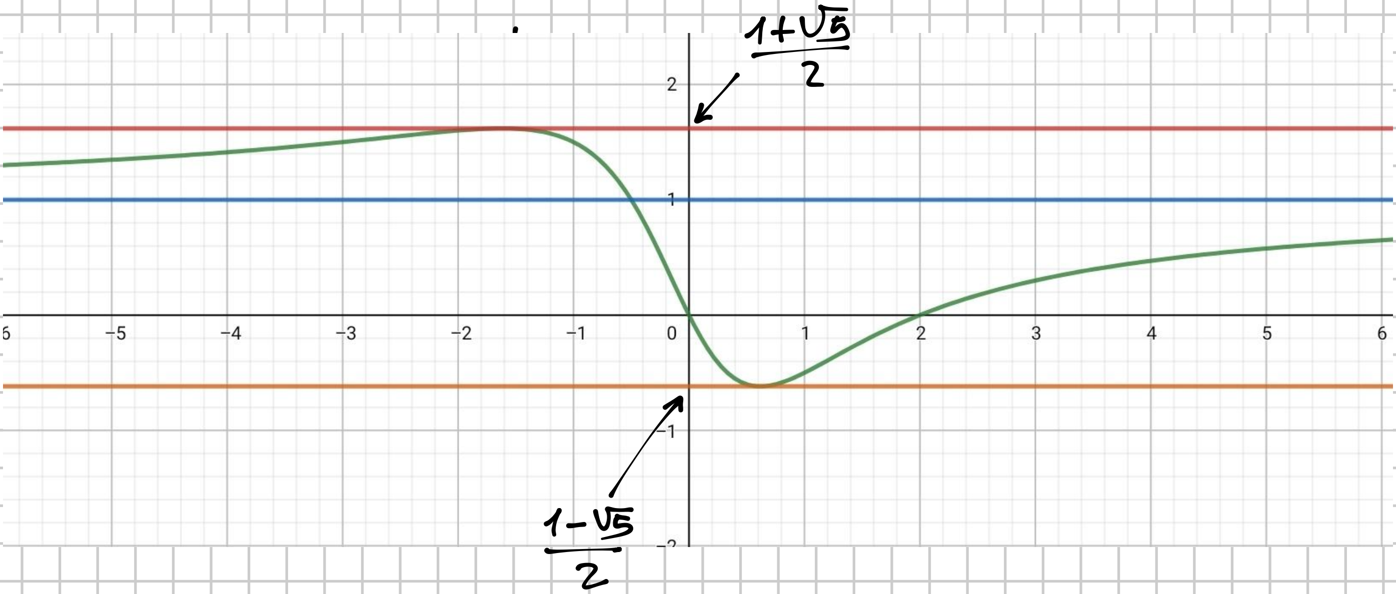
studiamo gli zeri e il segno

ZERI $\quad f(x) = 0 \implies x^2 - 2x = 0 \implies x = 0 \ \vee \ x = 2$

$A(2,0) \qquad O(0,0)$

SEGNO $\quad f(x) > 0 \implies x^2 - 2x > 0 \implies x < 0 \ \vee \ x > 2$

	0		2	
+	0	−	0	+



456 $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = 8x^3 - 8$.

$f \circ g$ $g \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

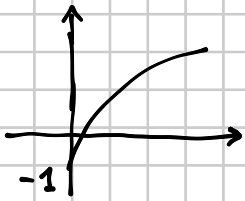
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$$

$$= g(\sqrt[3]{x}) = 8(\sqrt[3]{x})^3 - 8 = 8x - 8$$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(8x^3 - 8) = \sqrt[3]{8x^3 - 8} = 2\sqrt[3]{x^3 - 1}$$

460 $f(x) = \sin 2x; \qquad g(x) = \sqrt{x} - 1.$



$f: \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad g: \mathbb{R}_0^+ \to [-1, +\infty[$

1) $f \circ g : \mathbb{R}_0^+ \to [-1, 1]$ si può comporre perché

$\operatorname{im} g \subseteq \operatorname{dom} f$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

$= f(\sqrt{x} - 1) = \sin[2(\sqrt{x} - 1)]$

2) $g \circ f$ in realtà non si può comporre perché $\operatorname{im} f \not\subseteq \operatorname{dom} g$

dobbiamo fare una <u>restrizione</u>

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin 2x) = \sqrt{\sin 2x} - 1$

$\sin 2x \geq 0 \qquad 2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\operatorname{dom}(g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$