1/10/2020

493 Determina dominio, insieme immagine e segno di $f(x)=\ln\left(|x|-\sqrt{x^2-1}\right)$ e stabilisci se la funzione è pari o dispari.
Traccia un grafico probabile delle funzioni $g(x)=1-f(x-1)$ e $h(x)=\dfrac{1}{|f(x)|}$.

$[D_f=\{x\leq -1 \vee x\geq 1\}; Im(f)=\{y\leq 0\};$ pari$]$

$$f(x)=\ln\left(|x|-\sqrt{x^2-1}\right)$$

DOMINIO

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ |x|-\sqrt{x^2-1}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq -1 \vee x\geq 1 \\ \sqrt{x^2-1}<|x| \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq -1 \vee x\geq 1 \\ \cancel{x^2}-1<\cancel{x^2} \end{cases}$$

$-1<0$ VERO

$$\Rightarrow D=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

SEGNO

$f(x)>0 \qquad \ln\left(|x|-\sqrt{x^2-1}\right)>0 \qquad |x|-\sqrt{x^2-1}>1$

$$-\sqrt{x^2-1}>1-|x|$$

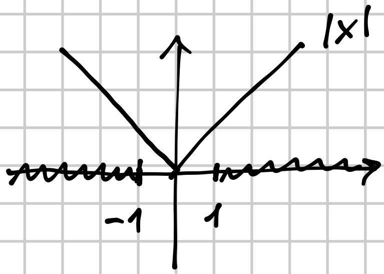
$$\sqrt{x^2-1}<|x|-1$$

$$\cancel{x^2}-1<\cancel{x^2}+1-2|x|$$

$$2|x|<2$$

$$\begin{cases} |x|<1 \\ \underbrace{x\leq -1 \vee x\geq 1}_{\text{DOMINIO}} \end{cases}$$

qui $|x|<1$ è sempre falso



$\Rightarrow f(x)>0$ è sempre falso, cioè $f(x)\leq 0 \quad \forall x\in D$

INSIEME IMMAGINE

$$y = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\begin{cases} y = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right) \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$e^y = |x| - \sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{x^2-1} = |x| - e^y$$

$$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} + e^{2y} - 2|x|e^y$$

$$2|x|e^y = e^{2y} + 1$$

$$|x| = \frac{e^{2y}+1}{2e^y} \qquad x = \pm \frac{e^{2y}+1}{2e^y}$$

$$\frac{e^{2y}+1}{2e^y} \geq 1 \qquad e^{2y} + 1 \geq 2e^y$$

$$-\frac{e^{2y}+1}{2e^y} \leq -1$$

$$e^{2y} - 2e^y + 1 \geq 0$$

$$(e^y)^2 - 2e^y + 1 \geq 0$$

$$(e^y - 1)^2 \geq 0 \quad \forall y$$

Siccome so che $y \leq 0$ (dal segno) deduco che $\text{im}(f) =]-\infty, 0]$

f è PARI

$$f(x) = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right)$$

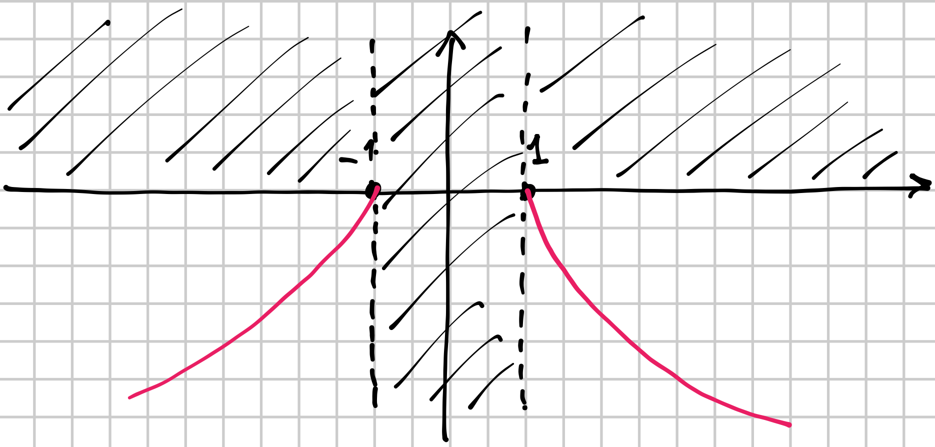
$$f(-x) = \ln\left(|-x| - \sqrt{(-x)^2-1}\right) = \ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right) = f(x)$$

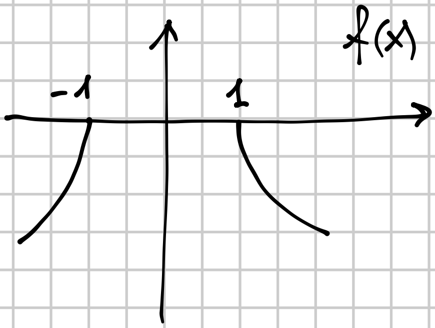
Per disegnare il grafico di f:

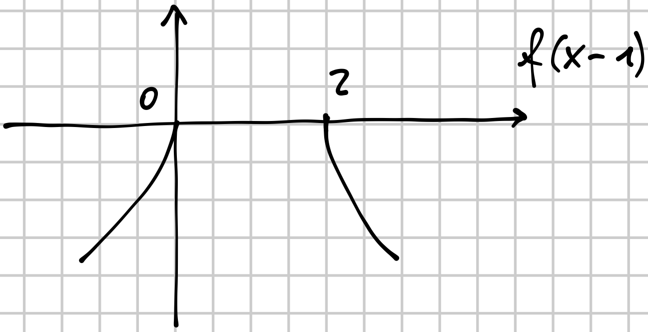
ZERI

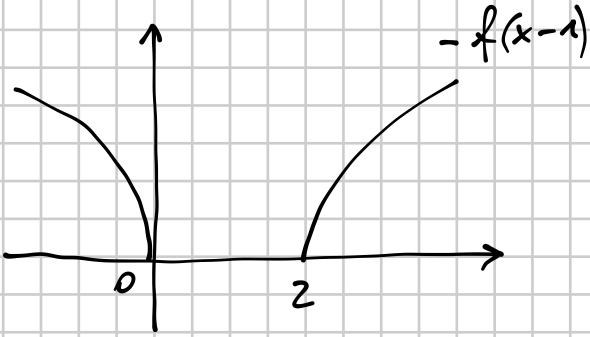
$\ln\left(|x| - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 \qquad |x| - \sqrt{x^2-1} = 1 \qquad \sqrt{x^2-1} = |x| - 1$

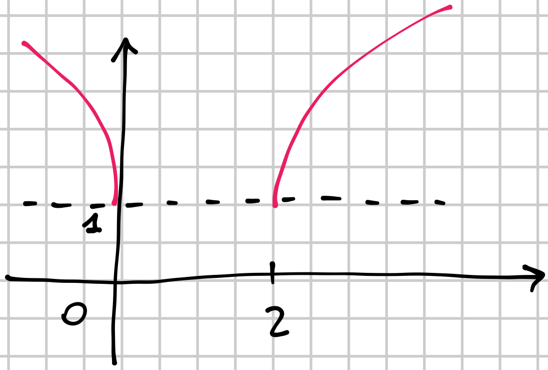
$\cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - 2|x| + 1 \qquad 2|x| = 2 \qquad |x| = 1 \qquad x = \pm 1$

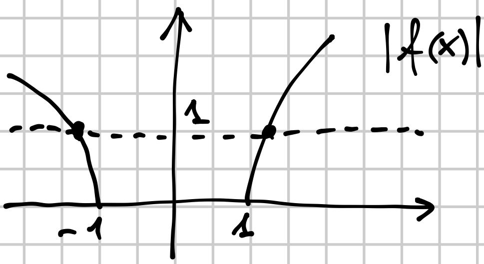


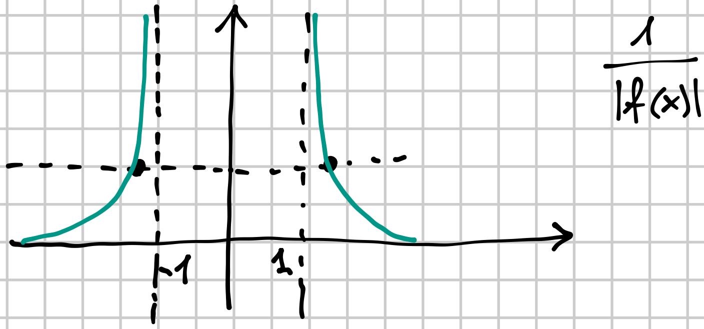

$f(x)$
-1
1

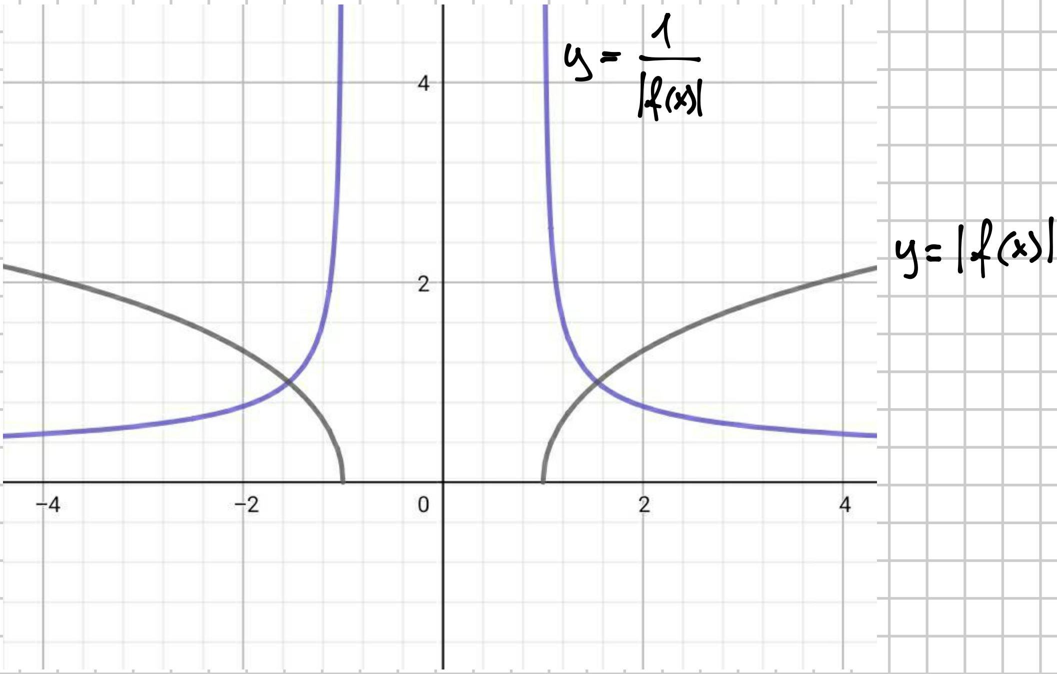

$f(x-1)$
0
2


$-f(x-1)$
0
2


1
0
2


$|f(x)|$
1
-1
1


$\frac{1}{|f(x)|}$
-1
1


$y = \frac{1}{|f(x)|}$
$y = |f(x)|$
4
2
−4
−2
0
2
4

Se 2 funzioni sono entrambe dispari, com'è il loro prodotto?

$$f(-x) = -f(x) \qquad g(x) = -g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) =$$

$$= (f \cdot g)(x)$$

Il prodotto di due funzioni dispari è una funzione pari

Com'è la composizione di due funzioni dispari?

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad f(-x) = -f(x)$$

$$g(-x) = -g(x)$$

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) =$$

$$= -(f \circ g)(x)$$

la composizione di due funzioni dispari è dispari