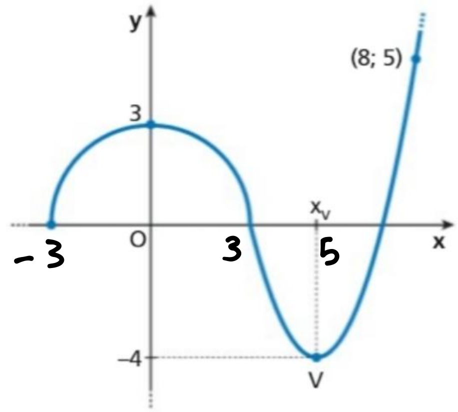
5/10/2020

5) Il grafico in figura rappresenta una funzione $f(x)$ ed è costituito da una semicirconferenza e da un arco di parabola.

a) Scrivi l'equazione di $f(x)$, trova agli zeri e gli intervalli in cui f è crescente.

b) Spiega perché f è invertibile tra 0 e x_V, scrivi l'equazione della funzione inversa e disegna il suo grafico.



a) $D = [-3, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 10x + 21 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

CIRC. $C(0,0)$ $R = 3$

$x^2 + y^2 = 9$

$y^2 = 9 - x^2$

$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$

$+$ SEMICIRC. SOPRA

$-$ SEMICIRC. SOTTO

ZERI

$f(x) = 0$ $\quad x = \pm 3$

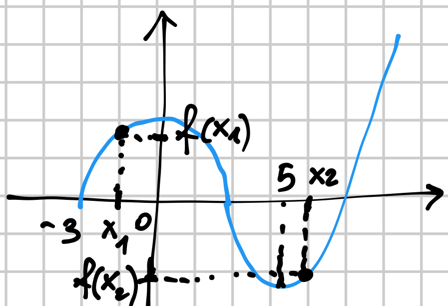
$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = 7$

$(x-3)(x-7) = 0$

f è STRETTAMENTE CRESCENTE IN $[-3, 0]$ E IN $[5, +\infty[$

~~f è STRETT. CRESCENTE IN $[-3, 0] \cup [5, +\infty[$~~

Per definizione f è crescente (strettamente) in A sse $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



$f(x) = \frac{1}{x}$

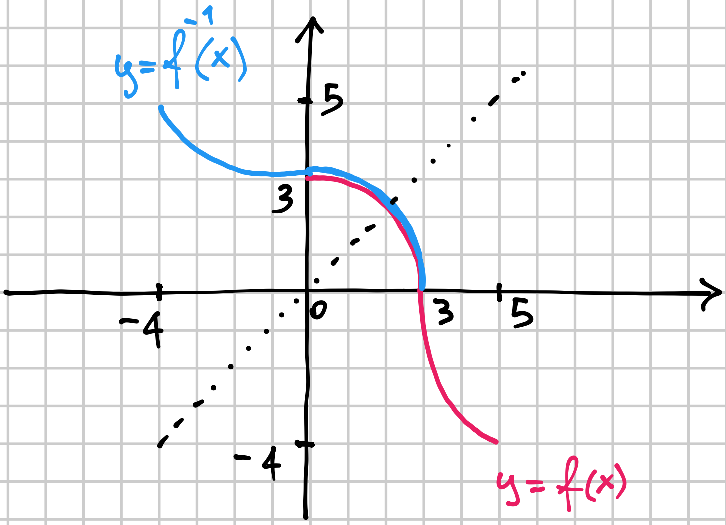
f è strett. decrescente in $]-\infty, 0[$

f è strett. decrescente in $]0, +\infty[$

Ma <u>NON</u> è vero che f è strett. decrescente nell'unione $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

b) In $[0,5]$ f è invertibile perché strettamente decrescente, dunque iniettiva.

$$f_{|[0,5]} = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 10x + 21 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 5 - \sqrt{4+x} & -4 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{9-x^2} & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 10x + 21$$

$$x = y^2 - 10y + 21$$

$$y^2 - 10y + (21 - x) = 0$$

$$y = 5 \pm \sqrt{25 - (21-x)} = 5 \pm \sqrt{4+x}$$

prendo quella col − ("passo" sotto della parabola)

SUCCESSIONI REALI

ESEMPI

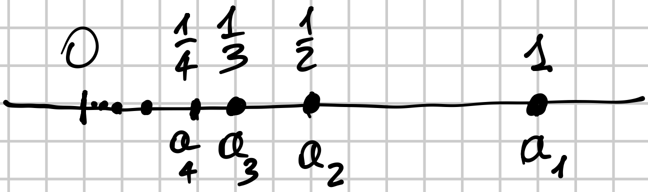
1) $a_n = n$ $\qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3$

$\dots \quad a_{576} = 576 \quad \dots$

2) $a_n = 2n^2 + 1$ $\qquad a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_2 = 9 \dots$

3) $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad a_0$ NON DEFINITA $\quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3} \dots$

$a(n) = a_n$



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$ INFINITESIMA

Limite per n che tende a $+\infty$ di $\frac{1}{n}$ è uguale a 0

4) $b_n = 5 + \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) = 5$ CONVERGE A 5

5) $c_n = n^2$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ DIVERGE A $+\infty$

6) $r_n = -n$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$ DIVERGE A $-\infty$

7) $s_n = (-1)^n$ $\qquad n$ PARI $\to s_n = 1$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ NON ESISTE

n DISPARI $\to s_n = -1$

OSCILLA

ALTRI ESEMPI SIGNIFICATIVI

devo fare qualcos'altro per calcolare il limite

8) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ FORMA INDETERMINATA

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = \frac{+\infty}{+\infty}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0}} = \frac{2}{1} = 2$$

VERIFICA EMPIRICA

$n = 1$ $\frac{2}{1+1} = 1$ .... $n = 100$ $\frac{200}{101} = 1,9801...$

$n = 2$ $\frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}$ $n = 1000$ $\frac{2000}{1001} = 1,9980....$

⋮

3. $\dfrac{5-n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5-n}{2n+1}=\frac{5-\infty}{2(+\infty)+1}=\frac{-\infty}{+\infty+1}=\frac{-\infty}{+\infty}\quad F.I.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5-n}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}\left(\frac{5}{n}-1\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

4. $2n^2+6n-1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n^2+6n-1\right)=2(+\infty)^2+6(+\infty)-1=$$

$$=+\infty+\infty-1=+\infty$$

Se fosse

MENO

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n^2-6n-1\right)=\underbrace{+\infty-\infty}_{F.I.}-1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\underbrace{n^2}_{+\infty}\left(2-\underbrace{\frac{6}{n}}_{0}-\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}\right)=+\infty(2-0-0)=+\infty\cdot 2=+\infty$$

11. $\dfrac{3n-7}{8n^2+4n+5}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-7}{8n^2+4n+5} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\left(3-\overset{\to 0}{\frac{7}{n}}\right)}{\underbrace{n^{\cancel{2}}}_{+\infty}\left(8+\underbrace{\frac{4}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{5}{n^2}}_{0}\right)} = \frac{3}{+\infty\cdot 8} = \frac{3}{+\infty} = 0$$