8/10/2020

24. $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)=+\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=\frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\cdot\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{|n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+|n|\sqrt{\frac{1}{n}}}=$$

n perché $n\in\mathbb{N}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overset{+\infty}{\cancel{n^2}}\left(1+\overset{0}{\frac{1}{n^2}}-\overset{0}{\frac{1}{n}}\right)}{\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\underset{0}{\frac{1}{n^2}}}+\sqrt{\underset{0}{\frac{1}{n}}}\right)}_{\sqrt{1+0}+0=1}}=\frac{+\infty\cdot 1}{1}=+\infty$$

ALTERNATIVA

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(|n| \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(n \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{n} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n \left[\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \frac{\sqrt{n}}{n} \right] = \lim_{n \to +\infty} \overset{+\infty}{\overset{\uparrow}{n}} \left[\overbrace{\sqrt{1+\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n^2}}}}^{\to 1} - \overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \right] =$$

$$= +\infty \cdot 1 = +\infty$$

25. $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3n}\right)=+\infty-\infty \quad \text{F.I.}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n-(n^2+3n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}-3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+3n}}=\frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{-2\cancel{n}}{\cancel{|n|}\left(\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}}_{\to\sqrt{1}}+\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0}}}_{\to\sqrt{1}}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{-2}{2}=-1$$

Il limite per $n \to +\infty$ del rapporto di due polinomi con lo stesso grado è dato dal rapporto dei coefficienti di grado massimo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-5n^4 + 7n^3 - 8n^2 + 2n - 1}{17n^4 - 5n^2 - 2n + 10} = -\frac{5}{17}$$

Se il numeratore ha grado maggiore del denominatore, il limite per $n \to +\infty$ è ∞ (il segno è determinato dal rapporto dei coefficienti di grado massimo)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-7n^3 + 5n - 1}{-3n^2 + 2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{\cancel{n^3}}\left(-7 + \frac{5}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(-3 + \frac{2}{n^2}\right)} =$$

$$= +\infty \cdot \underbrace{\left(\frac{-7}{-3}\right)}_{>0} = +\infty$$

Se il numeratore ha grado minore del denominatore, il limite per $n \to +\infty$ è 0.

Ai fini del calcolo del limite per $n \to +\infty$ di un polinomio, conta solo il monomio di grado massimo:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-5n^3 + 6n^2 - 3n\right) = -\infty \overset{\text{F.I.}}{+\infty} - \infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} -5n^3 \underbrace{\left(1 - \frac{6}{5n} + \frac{3}{5n^2}\right)}_{\downarrow \, 1}$$ è uguale a $\lim_{n \to +\infty} -5n^3$

quindi "conta solo" $-5n^3$