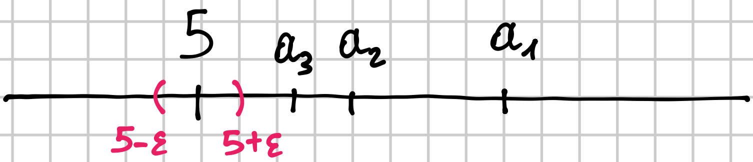
19/10/2020

INTORNI E LIMITI DI SUCCESSIONI

$a_n = 5 + \frac{1}{n}$ $\qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = 5$

$\forall I(5) \quad \exists M : \quad \forall n \geq M \quad 5 + \frac{1}{n} \in I(5)$



Consideriamo intorni del tipo $]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[$ $\qquad \varepsilon > 0$
(pensato "piccolo")

Prendere $\varepsilon > 0$ equivale a prendere un intorno

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \quad \forall n \geq M \quad 5 + \frac{1}{n} \in]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[$

$$5 - \varepsilon < 5 + \frac{1}{n} < 5 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \left(5 + \frac{1}{n}\right) - 5 < \varepsilon$$

$$\Big|\underbrace{\left(5 + \frac{1}{n}\right)}_{a_n} - \underbrace{5}_{L}\Big| < \varepsilon$$

NUOVA definizione di limite di una successione convergente (equivalente a quella di prima)

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \qquad (L \in \mathbb{R})$ sse

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall n \geq M \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

Riprendiamo ancora l'esempio $a_n = 5 + \frac{1}{n}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 5$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall n \geq M \quad \underbrace{\left| \left(5 + \frac{1}{n}\right) - 5 \right| < \varepsilon}_{\frac{1}{n} < \varepsilon}$$

Se scelgo vari valori di ε, a ciascuno di essi si può far corrispondere un M che va bene...

$\varepsilon = 1$ $\qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ basta prendere $M = 2$

$n > 1$

tutti gli a_n
con $n \geq 2$
sono tali che $n > 1$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \iff n > 100$ basta prendere $M = 101$

$\varepsilon = \frac{1}{1000000}$ $\qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{1000000} \iff n > 1000000$

$M = 1000001$

ma anche $M = 2000000$

$\vdots$