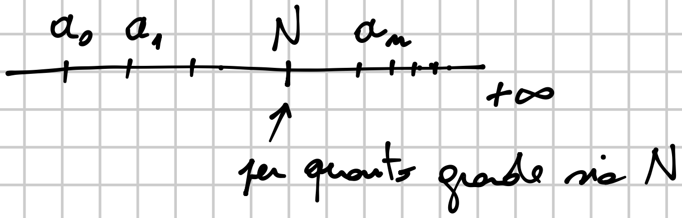
20/10/2020

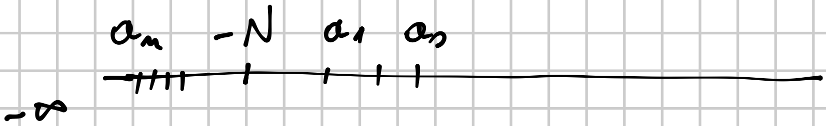
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists M : \forall n \geq M \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \forall N > 0 \ \exists M : \forall n \geq M \quad a_n > N$$



$$\forall I(+\infty) \ \exists M : \forall n \geq M \quad a_n \in I(+\infty)$$

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = -\infty \iff \forall N > 0 \ \exists M : \forall n \geq M \quad a_n < -N$$

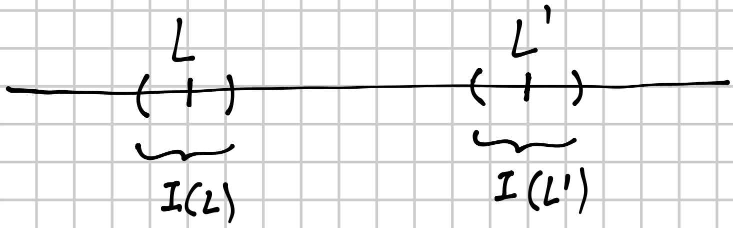


$$\forall I(-\infty) \ \exists M : \forall n \geq M \quad a_n \in I(-\infty)$$

Teorema (di unicità del limite). *Sia $\{a_n\}$ una successione convergente a un numero reale L. Allora la successione $\{a_n\}$ non converge a nessun altro numero reale.*

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che esistano due limiti diversi $L \neq L'$



Prendo due intorni disgiunti

$$I(L) \cap I(L') = \emptyset$$

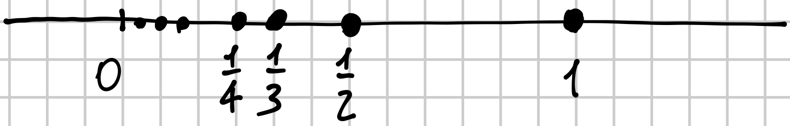
ma definitivamente (da un indice in poi) gli elementi della successione devono stare contemporaneamente in $I(L)$ e $I(L')$. ASSURDO

DEFINIZIONE

Il numero reale x_0 è un **punto di accumulazione** di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

ESEMPIO

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$



1 NON è punto di acc. di A ; nessun punto di A è di accumulaz. per A

0 è di accumulazione per A (anche se $0 \notin A$)

Se considero $A' = A \cup \{0\}$, 0 è di accumulaz. per A' (e $0 \in A'$)

$]a, b[$ è tale che tutti i suoi punti sono di accumulazione,
anche a e b sono di acc. per $]a, b[$

$[a, b]$ è tale che tutti i suoi punti sono di acc.

DEFINIZIONE

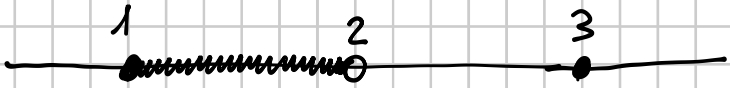
Sia x_0 appartenente a un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$. x_0 è un **punto isolato** di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A diversi da x_0.

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} , n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ contiene solo PUNTI ISOLATI

Un intervallo <u>NON</u> contiene punti isolati

ESEMPIO

$A = [1,2[\cup \{3\}$



3 è punto isolato

1 è di accumulazione appartenente ad A

2 è di accumulazione non appartenente ad A

Tutti gli altri punti (quelli di $]1,2[$) sono di accumulazione appartenenti ad A.

DEFINIZIONE

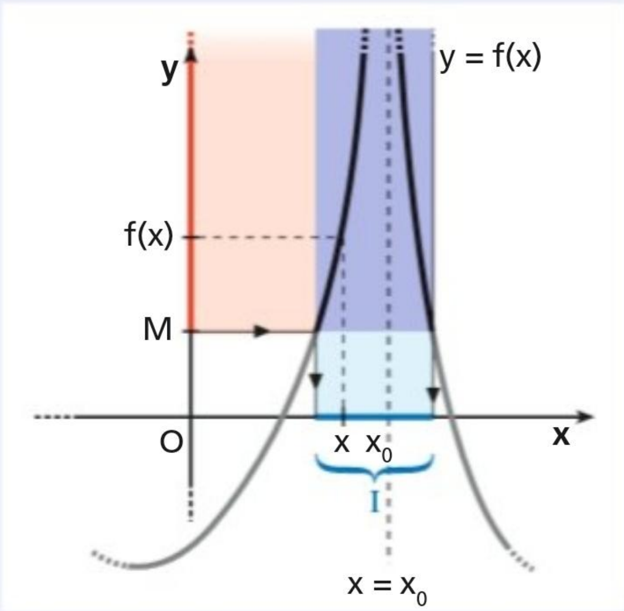
Limite $+\infty$ per x che tende a x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$, escluso al più il punto x_0 interno ad $[a; b]$. $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che

$$f(x) > M$$

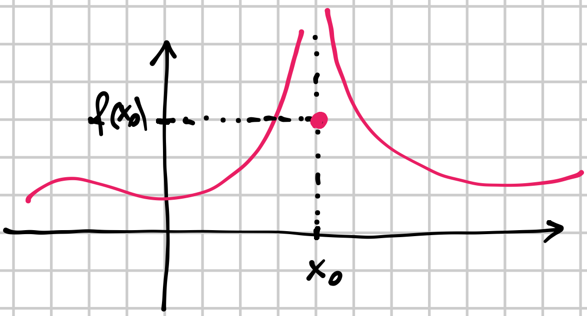
per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.

Si scrive: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.



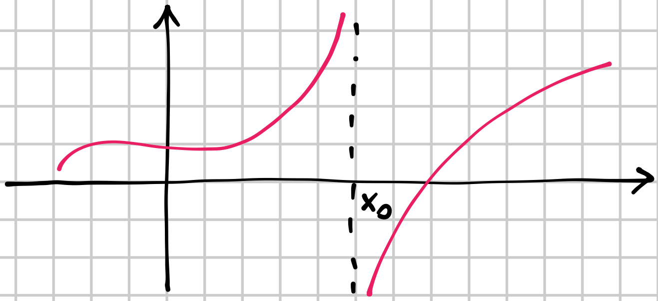
$\forall M > 0 \quad \exists I(x_0) : \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \quad f(x) > M$

(x_0 è di accumulazione per il dominio di f)



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

anche se $x_0 \in \text{dom} f$ nel limite per $x \to x_0$ non viene considerato

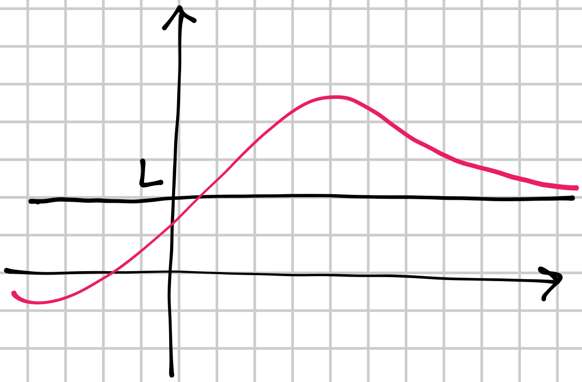


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ NON ESISTE

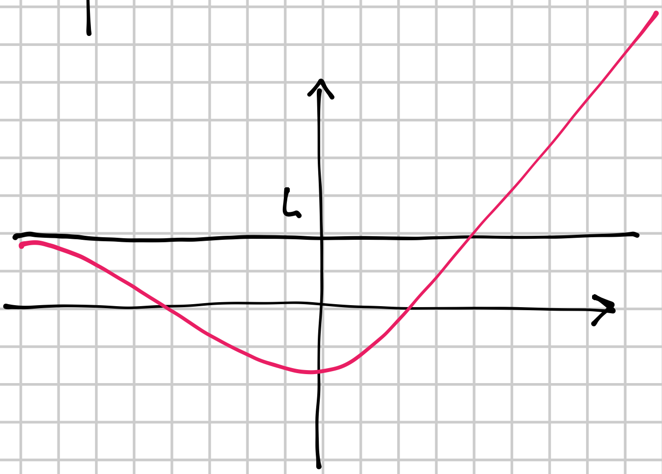
(a volte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$)

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \iff \forall M>0 \quad \exists I^+(x_0) : \forall x\in I^+(x_0) \quad f(x)<-M$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \iff \forall M>0 \quad \exists I^-(x_0) : \forall x\in I^-(x_0) \quad f(x)>M$$

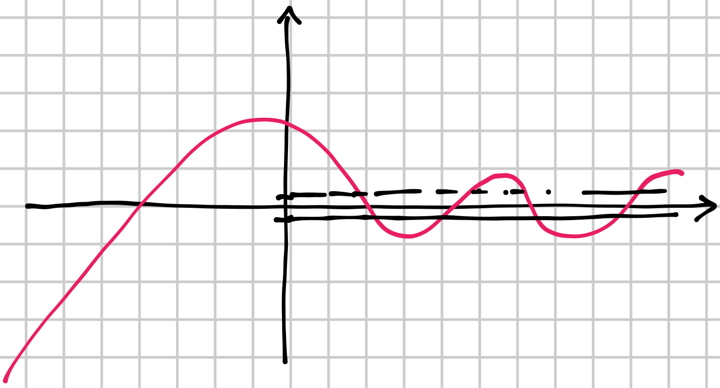


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$



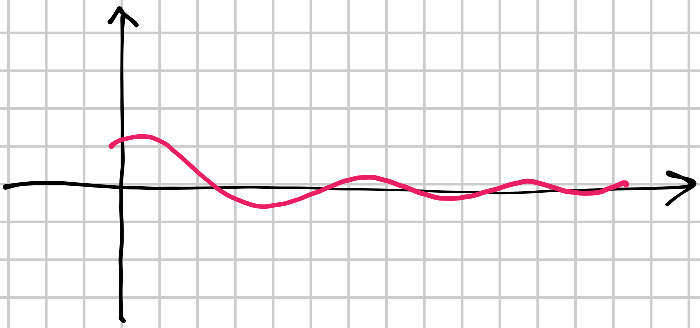
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ NON ESISTE



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

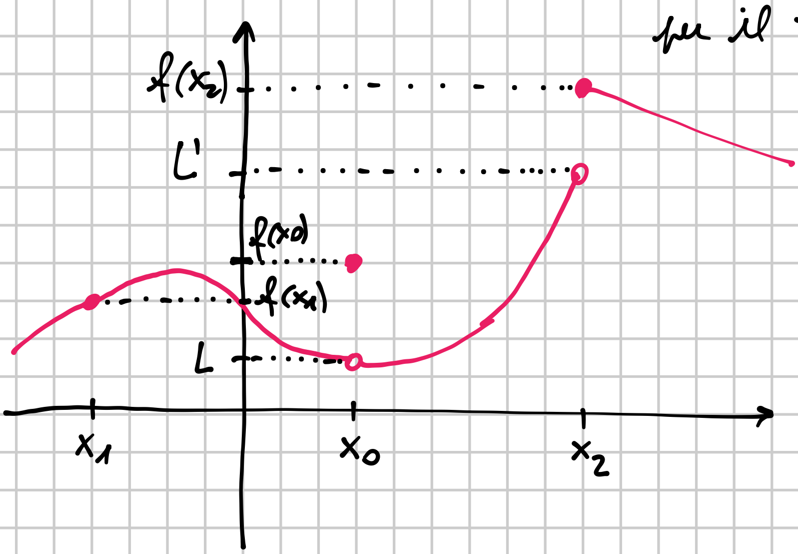
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\Downarrow \qquad (x \to +\infty)$$

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$

per il TH. CARABINIERI



$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$$

$\lim_{x \to x_2} f(x) =$ NON ESISTE ma esistono $\lim_{x \to x_2^-} f(x) = L'$

e $\lim_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2)$

Osserviamo che il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ esiste se e solo se esistono entrambi i limiti destro e sinistro e coincidono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

ATTENZIONE

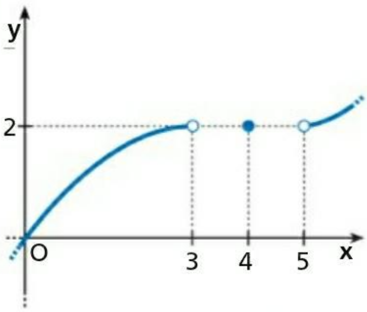
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$

(oppure $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$)

La scrittura $x \to 0^+$ significa che x si sta avvicinando a 0 per valori maggiori di 0. NON significa cose del tipo 0,1 o 0,01, ecc....

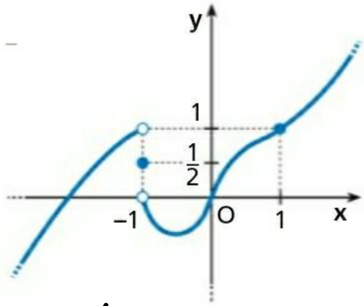
164



~~$\lim_{x\to 4} f(x) = \square$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \square$;~~

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \boxed{2}$; $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \boxed{2}$.

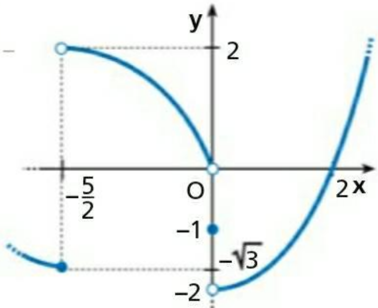
165



$\lim_{x\to -1} f(x) = \boxed{\nexists}$; $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \boxed{0}$;

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \boxed{1}$; $\lim_{x\to 1} f(x) = \boxed{1}$.

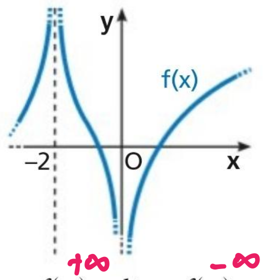
166



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \boxed{0}$; $\lim_{x\to -\frac{5}{2}^-} f(x) = \boxed{-\sqrt{3}}$;

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{-2}$; $\lim_{x\to -\frac{5}{2}^+} f(x) = \boxed{2}$.

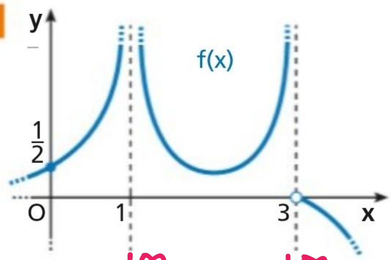
195



$\lim_{x\to -2^-} f(x)$; $+\infty$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$; $-\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)$; $+\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. $-\infty$

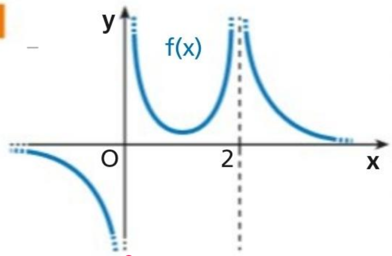
196



$\lim_{x\to 1^-} f(x)$; $+\infty$ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$; $+\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$; $+\infty$ $\lim_{x\to 3^+} f(x)$. 0

197



$\lim_{x\to 0^-} f(x)$; $-\infty$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; $+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $+\infty$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$. $+\infty$