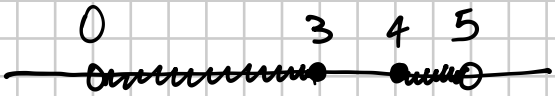
30/10/2020 LA COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$ (V. DISPENSE)

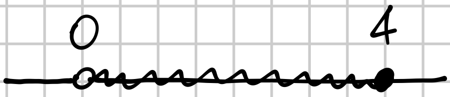
ESEMPI

1) $A =]0,3] \cup [4,5[$



$0, -2, -7$ minoranti di A $\qquad$ $5, 6$ maggioranti di A

2) $B =]0,4]$



$-1, 0$ minoranti di B $\qquad$ $4, 5$ maggioranti di B

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$0 \notin B$ $\qquad$ $4 \in B$ $\qquad$ 4 è il massimo di B

NON CI SONO MINORANTI DI B
CHE APPARTENGONO A B
$\hookrightarrow$ $\min B$ NON ESISTE

$\max B = 4$

3) $C = [0,4]$ $\qquad$ $\min C = 0$ $\qquad$ $\max C = 4$

4) $D =]-3, +\infty[$ $\qquad$ D non ha maggioranti

-3 è un minorante $\notin D$

$\min D$ NON ESISTE $\qquad$ $\max D$ NON ESISTE

5) $E = [-3, +\infty[$ $\qquad$ E non ha maggioranti

-3 è un minorante $\in E$

$\min E = -3$ $\qquad$ $\max E$ NON ESISTE

TEOREMA

$A \subseteq \mathbb{R}$. Se $\max A$ e $\min A$ esistono, sono unici.

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo di avere due massimi di $A \rightsquigarrow x' \quad x''$

Allora deve essere $\forall x \in A \quad x \leq x'$ e $x \leq x''$

$$\left.\begin{array}{l} x' \in A \Rightarrow x' \leq x'' \\ x'' \in A \Rightarrow x'' \leq x' \end{array}\right| \Rightarrow x' = x''$$

IN GENERALE

$a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

ESEMPI

6) $F =]-\infty, -2[\cup [5, +\infty[$ non ha né maggioranti né minoranti

$\Downarrow$

NON è SUP. LIMITATO

NON è INF. LIMITATO

7) $G =]2, +\infty[$ non è sup. limitato, ma è inf. limitato

8) $H =]2, 7]$ $\left.\begin{array}{l} \text{è sup. limitato} \\ \text{e inf. limitato} \end{array}\right| \Rightarrow$ è limitato

$H =]2, 7]$ $\qquad$ $\max H = 7$

$\min H$ NON ESISTE

MINORANTI DI $H \rightarrow\ ]-\infty, 2]$ $\quad$ MASSIMO DEI MINORANTI $= 2 = \inf H$

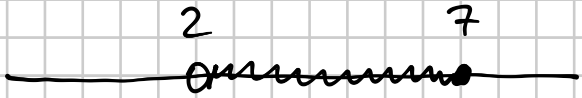
MAGGIORANTI DI $H \rightarrow [7, +\infty[$ $\quad$ MINIMO DEI MAGGIORANTI $= 7 = \sup H$

$$\sup H = \min \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è maggiorante di } H \} = 7$$

ESTREMO SUPERIORE DI H

$$\inf H = \max \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ è minorante di } H \} = 2$$

ESTREMO INFERIORE DI H



$H =]2, 7]$

$\min H$ NON ESISTE $\qquad \inf H = 2$

$\max H = 7 \qquad \sup H = 7$

PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

Ogni sottoinsieme NON VUOTO e superiormente (inferiormente) limitato di $\mathbb{R}$ ha in $\mathbb{R}$ estremo superiore (inferiore)

$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2} \}$ $\quad$ ha in $\mathbb{R}$ estremo sup. $\sup A = \sqrt{2}$

NON ha in $\mathbb{Q}$ estremo superiore, perché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$